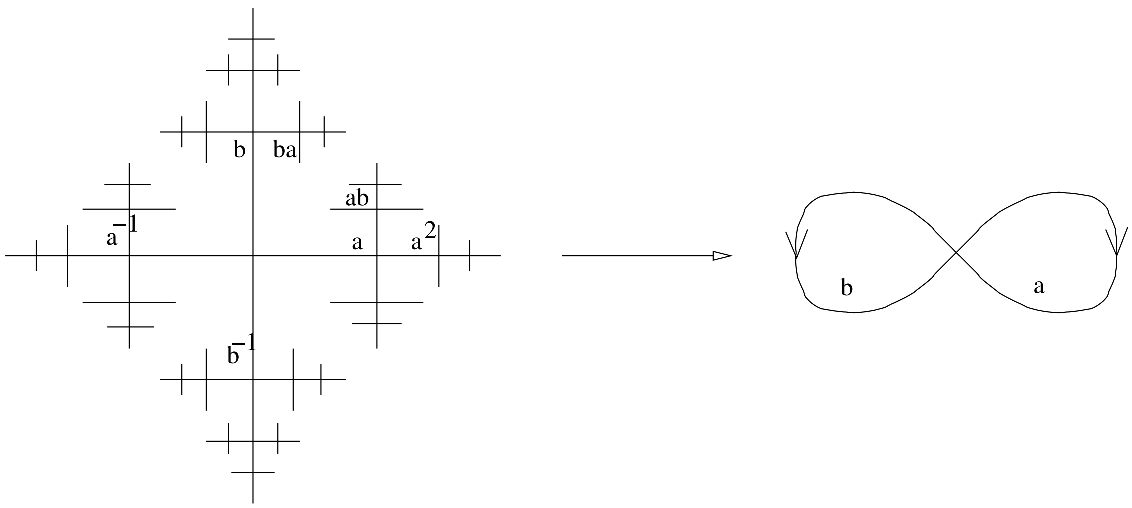
Ludwig-Maximilians-Universität München
Dr. Thomas Vogel

Topologische Methoden in der Gruppentheorie

In diesem Seminar sollen grundlegende Begriffe der geometrischen Topologie erarbeitet werden. Insbesondere wollen wir die Fundamentalgruppe studieren. Im Vordergrund steht ihre Berechnung (insbesondere der Satz von Seifert-van Kampen) und der Zusammenhang zwischen Untergruppen der Fundamentalgruppe und Überlagerungen. Als Anwendungen erhält man Sätze über die Struktur gewisser Gruppen auf elegante und transparente Weise.



Ein weiteres Ziel des Seminars ist die Bass-Serre Theorie die Gruppenoperationen auf Bäumen behandelt. Das Haupttheorem liefert die Äquivalenz der geometrisch/dynamischen Eigenschaft

(FA) Jede Operation der Gruppe G auf einem Baum X hat einen Fixpunkt x (d.h. $gx{=}x$ für alle $g \in G$).

und der gruppentheoretischen Eigenschaft

G ist nicht zerlegbar als amalgamiertes Produkt oder HNN-Erweiterung, und es gibt keine Kette $G_0 \subset G_1 \subset \ldots$ echt aufsteigender Untergruppen, so dass $G = \bigcup_n G_n$.

Die wichtigste Quelle für diesen Satz ist neben Kapitel 1 aus *Trees* von J. P. Serre der Aufsatz *Topological methods in group theory* von P. Scott und T. Wall in *Homological group theory* von C. T. C. Wall.

Zielgruppe: Das Seminar richtet sich an interessierte Studenten der Mathematik (4.-6. Semester). Es ist eine gute Ergänzung zu den Vorlesung *Geometrie und Topologie von Flächen* sowie *Riemannsche Geometrie*. Hörer der Vorlesung *Topologie 2* sind ebenso herzlich willkommen, einige Inhalte des Seminars wurden aber schon in der Vorlesung *Topologie 1* behandelt.

Vorkenntnisse: Analysis 1-3 (insbes. die dort eingeführten Grundbegriffe aus der Topologie), Lineare Algebra 1-2 (insbes. Gruppen).

Termin: Mittwoch, 10-12 Uhr in Hörsaal B252

Vorbesprechung: Mittwoch, 9. April 2014 um 10:00 Uhr, Hörsaal B252

Topologische Methoden in der Gruppentheorie
Programm

1. **Freie Gruppen, Amalgamierte Produkte, HNN-Erweiterungen**
   Definitionen, Normalformen für Gruppen-Elemente, Beispiele
   Literatur: [Wa] S. 137–147, [Se] S. 2–6.
   Vortragender: **Andy Graf**
2. **Fundamentalgruppe - Definition, Eigenschaften, $\pi_1(S^1)$, Produkte**
   Definieren Sie die Begriffe Homotopie (soweit wie nötig, also Homotopien von Wegen), Fundamentalgruppe. Erklären sie einfache Eigenschaften und beweisen Sie $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$. Als Anwendung kann man den Brouwerschen Fixpunktsatz für stetige Abblidungen der abgeschlossenen Scheibe in sich zeigen.
   Literatur: [SZ] S. 100–110. Siehe auch [SZ] S. 47–52 sowie jedes beliebige Lehrbuch dessen Titel die Worte *algebraische Topologie* enthält.
   Vortragender: **Leopold Zoller**
3. **Satz von Seifert-van Kampen**
   mit Beweis. Erklären Sie HNN-Erweiterungen in diesem Zusammenhang noch einmal.
   Literatur: [SZ] S. 111–118, [Wa] 138–139.
   Vortragender: **Rami Daknama**
4. **Anwendungen von Seifert-van Kampen: Präsentationen von Gruppen und Zellenkomplexe, Satz von Grushko**
   Zu einer Präsentation einer Gruppe G konstruiert man einen Zellenkomplex (mit höchstens zwei-dimensionalen Zellen) X_G, so dass $\pi_1(X_G) \simeq G$.
   Literatur: [SZ] S. 117–131, Informationen zu Zellenkomplexen findet man in [SZ] Kapitel 4, wir benötigen fast nur die Definitionen. Grushko's Theorem findet man in [Wa] S. 148–150.
   Vortragender: **Rami Daknama**
5. **Knotengruppen - Wirtingerpräsentation, Fox-Artin wild arc, Torusknoten**
   Definition von Knoten, Fundamentalgruppe des Knotenkomplements, Beweis der Existenz nicht trivialer Knoten. Fox-Artin haben ein Beispiel einer Einbettung $I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ angegeben, welche nicht äquivalent zur Standardeinbettung ist. Unterscheidung von Torusknoten, vielleicht Beweis, das die linkshändige und die rechtshändige Kleeblattschlinge nicht isotop sind.
   Literatur: [St] S. 144–156, die Wirtingerdarstellung findet man in jedem Buch zur Knotentheorie
   Vortragender: **Gregor Kleen**
6. **Überlagerungen 1**
   Definition, Beispiele, Blätterzahl, Hochheben von Wegen
   Literatur: [SZ] S.146–157, [Jä] Kapitel 9
   Vortragender: **Tilman Ritschl**
7. **Überlagerungen 2**
   Universelle Überlagerung, Beispiele, Liftungsverhalten, Deckbewegungen
   Literatur: [SZ] 157–164, [Jä] Kapitel 9
   Vortragender: **Tobias Kilian**
8. **Überlagerungen 3, Reidemeister-Schreier Methode, Satz von Kurosh**

Klassifikation von Überlagerungen durch Untergruppen der Fundamentalgruppe. Weil man erst jetzt weiss, dass Untergruppen freier Gruppen frei sind, hat man erst jetzt bewiesen, dass jede Gruppe eine Präsentation hat.

Literatur: [SZ], 164–166, 171–174, [Se] S. 29–30.

Vortragender: **Simon Reisser**

9. **Untergruppen von $A *_C B$ und $A *_C$, Graphen von Gruppen**

   Mögliche Beispiele: $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$, eventuell: Klassifikation von Überlagerungen durch die Monodromiedarstellung

   Literatur: [Wa] 151–163, [SZ] 171–174, [Se] S. 41–45

   Vortragender: **Simon Reisser**

10. **Gruppenoperationen auf Bäumen: Bass-Serre Theorie**

    Aus Zerlegungen von Gruppen in amalgamierte Produkte oder HNN-Erweiterungen erhält man Operationen auf Bäumen. Betrachten Sie auch einfache Beispiele: $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Eine Operation von G auf einem Baum erhält man auch dann, falls eine unendliche Folge $G_0 \subset G_1 \subset G_2 \ldots \subset G$ exisitert, so daß $G = \bigcup_n G_n$.

    Literatur: [Wa], 165–171, [Se] S. 58–59

    Vortragende: **Ronja Kuhne**

11. **Gruppenoperationen auf Bäumen 2: Bass-Serre Theorie**

    Umgekehrt erhält man aus einer Gruppenoperation auf einem Baum ohne Fixpunkte (und einer weiteren Bedingung) eine Zerlegung als amalgamiertes Produkt/HNN-Erweiterung.

    Literatur: [Wa], 165–171, [Se] S.58–61

    Vortragender: **Felix Küng**

12. **$\mathbf{Sl}(\mathbf{3}, \mathbb{Z})$**

    Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sl}(3, \mathbb{Z})$ kein amalgamiertes Produkt ist. In Serre wird nur dieser Fall betrachtet, HNN Erweiterungen aber nicht.

    Literatur : [Se] S. 64–67.

    Vortragender: **Felix Weitkämper**

13. Beispiele für weitere mögliche Themen: **Grigorchuk-Gupta-Sidki Gruppe, Existenz endlich erzeugter aber nicht endlich präsentierter Untergruppen, Ping-Pong, Weitere Anwendungen des Nielsen-Schreier Theorems für freie Gruppen, etc.**

    Konstruktion einer endlich erzeugten Gruppe G, so dass $|G| = \infty$ und jedes Element von G hat endliche Ordnung (eine Potenz von 3). G ist eine Untergruppe der Automorphismengruppe eines Baumes (dies ist nicht die berühmte erste Grigoruchuk Gruppe). Der Beweis für die Existenz endlich erzeugter nicht endlich präsentierter Untergruppen ist nicht konstruktiv. Diskussion folgender Tatsachen: Freie Gruppen sind residuel endlich, insbesondere Hopf'sch, Beispiel einer nicht Hopf'schen Gruppe: $BS(2, 3)$. (Eine Gruppe ist Hopfsch falls aus $G/N \simeq G$ für einen Normalteiler N folge, dass $N = \{1\}$.)

    Literatur: [Ba] 17–27, [L] 26–27, [Ba] 42–46.

    Vortragender:

Literatur

[Ba] G. Baumslag, *Topics in compinatorial group theory*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser 1993.

[Jä] K. Jänich, *Topologie*, Springer 1996.

[L] C. Löh, *Geometric group theory, an introduction*, http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/ggt_ws1011/

[Se] J. P. Serre, *Trees*, Springer 1980.

[St] J. Stillwell, *Classical Topology and combinatorial group theory*, Graduate Texts in Mathematics 72, 2. ed, Springer 1993.

[SZ] R. Stöcker, H. Zieschang, *Algebraische Topologie*, Teubner Verlag 1994.

[Wa] C. T. C. Wall, *Homological group theory*, LMS Lecture Note Series 36, Cambridge University Press 1979.