

Ludwig-Maximilians-Universität München
Prof. Dr. Thomas Vogel
Dr. Stephan Stadler

Gruppen mit polynomielltem Wachstum

Wintersemester 2016/17

Seminarbeschreibung

Die Geometrische Gruppentheorie hat ihre Wurzeln unter anderem in den Arbeiten von Dehn, Nielsen und Whitehead. Dort wurden erstmals topologische und geometrische Ideen verwendet um diskrete Gruppen zu studieren. Revolutioniert wurde die Theorie dann in den 80er Jahren durch die Arbeiten von Gromov. Sein Ansatz ermöglicht es algebraische und geometrische Eigenschaften von Gruppen in Beziehung zu setzen.

Ziel dieses Seminars ist es einen Meilenstein aus der Geometrischen Gruppentheorie zu besprechen, nämlich Gromovs Satz über endlich erzeugte Gruppen mit polynomielltem Wachstum. Wird eine Gruppe \mathcal{G} von einer endlichen symmetrischen Teilmenge $\mathcal{S} \subset \mathcal{G}$ erzeugt, so trägt die Gruppe die von \mathcal{S} induzierte Wortmetrik $d_{\mathcal{S}}$. Sind g und g' Elemente in \mathcal{G} , so ist $d_{\mathcal{S}}(g, g')$ die kleinste natürliche Zahl n , so dass $g = g' \cdot s_1 \cdot \dots \cdot s_n$ mit Elementen $s_i \in \mathcal{S}$ gilt. In dem metrischen Raum $(\mathcal{G}, d_{\mathcal{S}})$ kann man nun für jedes $r > 0$ die Anzahl $A(r)$ der Elemente in dem Ball mit Radius r um das neutrale Element e zählen. Wächst diese Zahl höchstens polynomiell, d.h. existiert eine Konstante $C > 0$ und eine natürliche Zahl d so dass $A(r) < Cr^d$ gilt, so hat die Gruppe \mathcal{G} *polynomielltes Wachstum*. Gromovs Resultat besagt nun, dass jede endlich erzeugte Gruppe mit polynomielltem Wachstum eine nilpotente Untergruppe von endlichem Index enthält.

Gromovs ursprünglicher Beweis gilt auch heute noch als anspruchsvoll, wurde aber von Kleiner und dann von Tao überarbeitet und vereinfacht.

Zielgruppe: Das Seminar richtet sich an Masterstudenten bzw. fortgeschrittene Bachelorstudenten der Mathematik oder Physik. Das Seminarthema hat Bezüge zum Seminar "Topologische Methoden in der Gruppentheorie" aus dem letzten Semester.

Vorkenntnisse: Für die meisten Vorträge genügen die Grundvorlesungen, insbesondere das Basiswissen der Gruppentheorie. Einige Vorträge benötigen Grundlagen von Liegruppen bzw. aus der Funktionalanalysis.

Termin: Mittwochs 16-18 Uhr im Raum A027 in mathematischen Institut.

Vorbesprechung: 19. Oktober, 16-18 Uhr im Raum A027 in mathematischen Institut.

Seminarprogramm

(1) **Wachstum von Gruppen.**

Endlich erzeugte Gruppen, Wortmetriken, Wachstumsfunktion, Formulierung von Gromovs Satz, Beispiele: abelsche Gruppen, freie Gruppen, Heisenberggruppe.

Literatur: [DK].

Vortragender:

Datum:

(2) **Satz von Wolf.**

Nilpotente Gruppen, polyzyklische Gruppen, polyzyklische Gruppen mit polynomielltem Wachstum sind virtuell nilpotent.

Literatur: [DK].

Vortragender:

Datum:

(3) **Satz von Milnor.**

Auflösbare Gruppen, endlich erzeugte auflösbare Gruppen sind polyzyklisch.

Literatur: [DK].

Vortragender:

Datum:

(4) **Gromovs Satz für Untergruppen kompakter Liegruppen.**

Kommutatorabschätzung in $U(n)$, Satz von Jordan, Satz von Gromov.

Literatur: [T].

Vortragender:

Datum:

(5) **Reduktion auf die Existenz von Darstellungen mit unendlichem Bild**

Epimorphismen von Gruppen mit polynomielltem Wachstum nach \mathbb{Z} . Anwendung des Satzes von Tits.

Literatur:[G],[K],[T].

Vortragender:

Datum:

(6) **Harmonische Funktionen auf Graphen**

Faltung, Laplace Operator, Existenz harmonischer Funktionen

Literatur: [K],[T].

Vortragender:

Datum:

(7) **Kleiners Satz I**

Polynomielltes Wachstum impliziert beschränktes Doppeln auf unbeschränkten Skalen, Poincaré Ungleichung.

Literatur: [K],[T].

Vortragender:

Datum:

(8) Kleiners Satz II

Elliptische Regularität, der Raum der harmonischen Funktionen ist endlich dimensional.

Literatur: [CM],[K],[T].

Vortragender:

Datum:

(9) Gromovs Satz

Zusammenfassung und Anwendungen.

Literatur: [DK],[G],[T].

Vortragender:

Datum:

REFERENCES

- [DK] Drutu, Cornelia; Kapovich, Michael, *Lectures on Geometric Group Theory*, <https://www.math.ucdavis.edu/~kapovich/EPR/ggt.pdf>
- [CM] Colding, Tobias H.; Minicozzi, William P., *Harmonic functions on manifolds*, Ann. of Math. (2) 146 (1997), no. 3, 725-747.
- [G] Gromov, Mikhael *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Publ. Math. IHÉS 53 (1981), 53-73.
- [K] Kleiner, Bruce *A new proof of Gromov's theorem on groups of polynomial growth*, Journal of the American Mathematical Society. 23 (3): 815-829.
- [T] Tao, Terence *Compactness and contradiction*, American Mathematical Society, 2013.