Ludwig-Maximilians-Universität München
Prof. Dr. Thomas Vogel

Seminar Wintersemester 2014/15

Konforme Abbildungen

In diesem Seminar studieren wir zuerst geometrische Eigenschaften holomorpher und meromorpher Abbildungen, die auf Gebieten in $\mathbb{C}$ definiert sind. Wesentliches Hilfsmittel sind das Lemma von Schwarz, hermitesche Metriken, insbesondere solche mit negativer Krümmung. Besonders nützlich ist das Ahlfors-Lemma, welches zeigt, dass die Poincaré-Metrik auf der Einheitskreisscheibe in einem gewissen Sinn extremal ist.

Schöne Anwendungen sind der Satz von Bloch und der Satz von Picard (in jeder Umgebung einer wesentlichen isolierten Singularität einer holomorphen Funktion werden alle Werte bis auf höchstens einer angenommen).

In einem zweiten Teil diskutieren wir harmonische Funktionen sowie das Dirichlet-Problem für Gebiete mit glattem Rand in $\mathbb{C}$. Dies ermöglicht eine Klassifikation von Kreisringen und anderer Gebiete in $\mathbb{C}$ bis auf biholomorphe Äquivalenz.

Schließlich betrachten wir Riemannsche Flächen. Ausgangspunkt ist die Frage nach dem besten Definitionsbereich einer holomorphen Funktion, die auf einer offenen Menge in $\mathbb{C}$ gegeben ist. In diesem Zusammenhang betrachten wir Homotopien, die Fundamentalgruppe und Überlagerungen Riemannscher Flächen. Unser Ziel ist der Beweis des Uniformisierungssatzes (Klassifikation einfach zusammenhängender Riemannscher Flächen). Wesentliches Hilfsmittel hierfür sind wieder harmonische Funktionen, die nun aber auf Riemannschen Flächen definiert sind.

Zielgruppe: Seminar für Bachelor-Mathematik, insbes. Hörer der Vorlesung Funktionentheorie.

Literatur: Wir folgen hauptächlich Ahlfors [Ah1] und Fischer-Lieb [FL1, FL2].

Vorkenntnisse: Funktionentheorie (im Umfang von [Jä]), Analysis 2

Termin: Mittwoch, 10-12 Uhr in Hörsaal B252

1. Vortrag am 15.10.2014

Es sind noch Vortäge zu vergeben.
Weitere Teilnehmer sind also herzlich willkommen.

Konforme Abbildungen
Programm

1. **Riemannsche Zahlensphäre, meromorphe Funktionen, Möbiustransformationen**
   $\widehat{\mathbb{C}}$, meromorphe Abb. als holomorphe Abb. nach $\widehat{\mathbb{C}}$, Möbiustransformationen, Doppelverhältnis, Darstellung holomorpher Abbildungen.
   Literatur: [FL1], S. 37–42 und [Ah1], S. 76–89.
   Vortragende: N. E.
2. **Lemma von Schwarz, nicht euklidische Geometrie**
   Holomorphe Abbildungen des Einheitskreises verkürzen den hyperbolischen Abstand, diskutieren Sie insbesondere auch die Picksche Erweiterung des Lemmas von Schwarz. Haymans Theorem über konvex univalente holomorphe Funktionen (wenn Zeit bleibt)
   Literatur: [FL1], S. 285–294. [Ah3] S. 1–7.
   Vortragender: T. B.
3. **Hermitesche Metriken, Lemma von Ahlfors, Satz von Bloch**
   Definitionen, Krümmung, Beispiele, Lemma von Ahlfors (Extremaleigenschaft ($ds \leq d\sigma$) der hyperbolischen Metrik σ in der Klasse der Metriken mit $K \leq -4$), Satz von Bloch
   Literatur: [FL2] S. 1–13
   Vortragender: S. W.
4. **Normale Familien, Sätze von Montel und Picard**
   Definitionen, Beziehung zwischen negativer Krümmung (im Zielgebiet) und Normalität (Satz von Grauert-Reckziegel, Montel, Picard). Hier wird insbesondere auch einiges gerechnet.
   Literatur: [FL2] S. 14–22.
   Vortragender: T. K.
5. **Harmonische Funktionen 1**
   Mittelwerteigenschaft, Poisson-Formel, Lösung des Dirichlet-Problems für $D_1(0)$, Charakterisierung harmonischer Abbildungen durch die Mittelwerteigenschaft
   Literatur: [FL1] S. 102–110, [Ah1] 160–172.
   Vortragender: F. W.
6. **Harmonische Funktionen 2**
   Harnack-Eigenschaft, Subharmonische Funktionen, Lösung des Dirichlet-Problems nach Perron
   Literatur: [Ah1] S. 233–243.
   Vortragender:
7. **Mehrfach zusammenhängende Gebiete**
   Wir betrachten nur Gebiete U, so dass $\mathbb{C} \setminus U$ endlich viele Wegzusammenhangskomponenten hat und zeigen, dass solche Gebiete biholomorph äquivalent zu geschlitzten Kreisringen sind.
   Literatur: [Ah1], S. 243–253.
   Vortragender:
8. **Analytische Fortsetzung, Fundamentalgruppe**
   Analytische Fortsetzung entlang von Wegen, Homotopie, Fundamentalgruppe für topologische Räume
   Literatur: [FL2], S. 23–33.

9. **Riemannsche Flächen**
   Vollständige analytische Fortsetzung, Def. von Riemannschen Flächen und holomorphen Abbildungen.
   Literatur: [FL2], S. 33–46.
10. **Differentialformen, Satz von Stokes**
    Integration von Differentialformen, Satz von Stokes für Flächen mit glattem Rand.
    Literatur: [FL1], S. 26–28, 56–61 165–169, [FL2] S. 47–51.
11. **Verzweigte Überlagerungen**
    Holomorphe Abbildungen als verzweigte Überlagerungen, universelle Überlagerung
    Literatur: [FL2]
12. **Harmonische Funktionen auf Riemannschen Flächen 1**
    Formulieren Sie die Ergebnisse für harmonische Funktionen auf Gebieten in $\mathbb{C}$ für Riemannsche Flächen, insbesondere das Harnack-Prinzip und die Lösung des Dirichlet-Problems auf Riemannschen Flächen mit Rand.
    Literatur: [FL2] S. 71–87.
13. **Harmonische Funktionen auf Riemannschen Flächen 2**
    Hodge-Operator, Greensche Formel, Green-Funktion eines Beschräkten Gebietes (entscheidendes Werkzeug im Beweis des Uniformisierungssatzes).
    Literatur: [FL2] S. 90–105 (es reicht wohl, wenn man bis S. 102 kommt),
14. **Uniformisierungssatz**
    Literatur: [FL1], S. 110–121.

Literatur

[Ah1] L. V. Ahlfors, *Complex analysis* International series in pure and applied mathematics, McGraw-Hill (2nd ed. 1966).

[Ah2] L. V. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mappings*, van Nostrand Mathematical Studues 10 (1966).

[Ah3] L. V. Ahlfors, *Conformal Invariants - Topics in geometric function theory*, McGraw-Hill Book Company (1973).

[FL1] W. Fischer, I. Lieb, *Funktionentheorie*, vieweg, 9. Auflage (2005).

[FL2] W. Fischer, I. Lieb, *Ausgewählte Kapitel aus der Funktioentheorie* vieweg (1988).

[Jä] K. Jänich, *Funktionentheorie*, Springer-Verlag.