SoSe 2015 Prof. Dr. Thomas Vogel

Niedrig-dimensionale Topologie

Blatt 9

Aufgabe 1. Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Abbildungen

$$f(x, y) = (x + 1, -y)$$
$$g(x, y) = (x, y + 1).$$

(i) Zeige dass die von f, g erzeugte Untergruppe G der affinen Gruppe von $\mathbb{R}^2$ eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{R}^2$ operiert.

(ii) Identifiziere den Quotienten $\mathbb{R}^2/G$.

(iii) Zeige, dass durch

$$f \cdot t = -t$$
$$g \cdot t = t$$

eine Operation von G auf $[-1, 1]$ definiert wird.

(iv) Sei M die 3-Mannigfaltigkeit

$$(\mathbb{R}^2 \times [-1, 1])/G,$$

wobei die Operation von G auf den Faktoren die Produktoperation der Wirkungen aus (i) und (iii) ist. Zeige, dass M der Totalraum einer Faserung über K mit Faser $[-1, 1]$ ist.

(v) Beschreibe die von der Inklusion induzierte Abbildung

$$\pi_1(\partial M) \longrightarrow \pi_1(M).$$

(vi) Finde eine inkompressible Fläche $(F, \partial F) \longrightarrow (M, \partial M)$.

(vii) Ist ∂F Rand einer Teilfläche in ∂M oder nicht?

Aufgabe 2. Sei Σ eine geschlossene orientierte Fläche von Geschlecht g.

(i) Zeige, dass es eine orientierungserhaltende Involution $\tau : F \longrightarrow F$ mit genau $2 + 2g$ Fixpunkten gibt, so dass

$$-\mathrm{id} = \tau_* : H_1(F; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(F; \mathbb{Z}).$$

(ii) Wir betrachten die Gruppenwirkung von $\mathbb{Z}_2$ auf $F \times [-1, 1]$, die durch $\tau \cdot (p, t) = (\tau(p), -t)$ definiert ist. Finde durch Entfernen von Bällen aus $F \times I$ eine 3-Mannigfaltigkeit M die $3 + 2g$ Randkomponenten hat, wobei alle Randkomponenten bis auf eine homömorph zu $\mathbb{RP}^2$ sind.

(iii) Zeige, dass $H_1(M)$ endlich ist.