SoSe 2015 Prof. Dr. Thomas Vogel

Niedrig-dimensionale Topologie

Blatt 8

Aufgabe 1. Lesen Sie die folgende, sehr elegante Arbeit:
M. Brown, *A proof of the generalized Schoenflies theorem*, Bull. Amer. Math. Soc., 66 (1960), 74–76.

Aufgabe 2. Sei M eine 3-Mannigfaltigkeit, $\widetilde{M} \longrightarrow M$ die universelle Überlagerung. Beweise, dass M irreduzibel ist falls $\widetilde{M}$ irreduzibel ist.

Sei nun Σ eine geschlossene Fläche und $\varphi : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ ein Diffeomorphismus. Zeige, dass die Mannigfaltigkeit $M_\varphi := \Sigma \times \mathbb{R}/(\varphi(x), t) \sim (x, t+1)$ prim ist.

Aufgabe 3. Wir wählen $p \in \mathbb{N}$ und q teilerfremd zu p. Seien $V_1, V_2 \simeq S^1 \times D^2$ Volltori. Um die 3-Mannigfaltigkeit $L(p,q)$ zu erhalten identifizieren wir die Ränder von V_1, V_2, so dass $\partial(\{1\} \times D^2) = \partial D \subset \partial V_1$ mit der Kurve $\gamma_{p,q}(t) = (t^p, t^q)$ in ∂V_2 identifiziert wird.

Auf V_1 wählen wir die Produktorientierung und erhalten so eine Orientierung auf $L(p,q)$. Seien $\alpha = S^1 \times \{1\}$ und $\beta = \partial D^2$ eine Basis von $H_1(\partial V, \mathbb{Z}) \simeq \pi_1(\partial V)$ sowie

$$\mu = p\alpha + q\beta$$
$$\lambda = r\alpha + s\beta$$

für natürlich Zahlen r, s mit $sp - rq = 1$. Die Kurven μ, λ repräsentieren auch Elemente von $\pi_1(L(p,q))$.

Zeige, dass

$$\alpha \sim \lambda^{-q}, \beta \sim \lambda^p, \lambda \sim \alpha^r \tag{1}$$

($\sim$ steht für *homotop in* $L(p,q)$). Folgere, dass D ein Element b in $H_2(L(p,q), \mathbb{Z}_p)$ repräsentiert. Außerdem repräsentiert D einen Erzeuger d von $H_2(L(p,q), V_2; \mathbb{Z})$, α ist ein Erzeuger a von $H_1(L(p,q); \mathbb{Z}_p)$ und λ ist ein Erzeuger c von $H_1(V_2; \mathbb{Z})$.

Aufgabe 4. Sei nun $0 < q, q' < p$ beide teilerfremd zu p. Wir betrachten $L = L(p,q), L' = L(p,q')$ sowie die oben definierten Objekte $V_1, V_2, r, s, \lambda, \mu, b, d, a, c$ für L sowie $V_1', V_2', r', s', \lambda', \mu', b', d', a', c'$ für L'.

Sei nun $h : L \longrightarrow L'$ eine stetige Abbildung deren Grad von Null verschieden ist.

(a) Zeige, dass h homotop ist zu einer Abbildung die V_2 nach V_2' abbildet. (Wir nehmen dies ab jetzt an.)

(b) Verwende die lange exakte Homologiesequenz (und ihre Natürlichkeit) um zu zeigen, dass aus $(h|_{V_2})_*(c) = kc'$ folgt, dass
$$h_*(d) = kd' \in H_2(L', V_2').$$

(c) Verwende (1), das universelle Koeffiziententheorem (sowie die Natürlichkeit der zugehörigen exakten Sequenz) sowie die lange exakte Homologiesequenz der Paare $(L, V_2), (L', V_2')$ um zu zeigen, dass

- $H_2(L; \mathbb{Z}_p) \simeq H_2(L, V_2; \mathbb{Z}_p) \simeq H_2(L, V_2; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_p$,
- $h_*(b) = kb' \in H_2(L'; \mathbb{Z}_p)$,
- $H_1(L; \mathbb{Z}_p) \simeq H_1(V_2; \mathbb{Z}_p) \simeq H_1(V_2; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_p$
- Unter diesen Isomorphismen gilt $c \otimes 1 \longmapsto ra$ und $c' \otimes 1 \longmapsto r'a'$, sowie $h_*(ra) = kr'a'$.

(d) Der Abbildungsgrad $\deg(h)$ von h erfüllt die Relation $\deg(h) a \cdot b \equiv h_*(a) \cdot h_*(b) \mod p$, hier ist $\cdot$ das Schnittprodukt. Zeige, dass

$$h_*(a) \cdot h_*(b) = -k^2 r' q \in \mathbb{Z}_p.$$

(e) Für den Grad von h gilt $qq' \deg(h) \equiv k^2 q^2 \mod p$. Benutze dies um zu zeigen, dass $\pm qq'$ ein quadratischer Rest in $\mathbb{Z}_p$ ist falls h eine Homotopieäquivalenz ist.

Hinweis: Alles was man zu algebraischer Topologie an dieser Stelle wissen muss steht zum Beispiel im Buch *Algebraische Topologie* von R. Stöcker und H. Zieschang.

Aufgabe 5. Seien q, q' teilerfremd zu p und $\nu, \nu' \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen so dass $q\nu \equiv q'\nu' \equiv 1 \mod p$. Wir fixieren $0 \neq k \in \mathbb{N}$. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} h_k : S^3 &\longrightarrow S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\} \\ (z, w) &\longmapsto \frac{(z^{k\nu'}, w^{k\nu})}{\|(z^{k\nu'}, w^{k\nu})\|}. \end{aligned}$$

Begründe warum dies eine Abbildung $h_{k,q,q'} : L(p, q) \longrightarrow L(p, q')$ induziert. Bestimme die Anzahl der Urbilder von $\left[(1/\sqrt{2}, 1\sqrt{2})\right] \in L(p, q')$ und zeige, dass $\deg\left(h_{k,\nu,\nu'}\right) = k^2 \nu\nu'$.

Aufgabe 6. (a) Sei $q' = -q \mod p$. Zeige, dass die Linsenräume $L(p, q) \cong L(p, q')$ homöomorph sind.

(b) Zeige, dass $L(p, q) \cong L(p, q')$ falls $qq' \equiv \pm 1 \mod p$.

Anmerkung: Tatsächlich ist $L(p, q) \simeq L(p, q')$ genau dann, wenn $q \equiv \pm q' \mod p$ oder $qq' \equiv \pm 1 \mod p$. Dies ist um einiges komplizierter als die Aufgaben 3,4, s. zum Beispiel E. Brody, *The topological classification of the lens spaces*, Ann. of Math. (2), 71 (1960), 163–184.

Aufgabe 7. Verwende Aufgabe 4 um zu zeigen, dass es 3-Mannigfaltigkeiten M gibt, die keinen orientierungsumkehrenden Homöomorphismus auf sich selbst zulassen.

Beweise, dass für solche (orientierten) 3-Mannigfaltigkeiten gilt $M\#(-M) \ncong M\#M$. Hier bezeichnet $-M$ die Mannigfaltigkeit M mit der umgekehrten Orientierung.