SoSe 2015 Prof. Dr. Thomas Vogel

Niedrig-dimensionale Topologie

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei M^3 eine geschlossene 3-Mannigfaltigkeit und $(V \simeq D^3, V' \simeq D^3)$ eine Heegardzerlegung.

Beweise, dass $M \simeq S^3$.

Aufgabe 2. Sei $p \neq 0$ eine natürliche und $1 \neq \xi \in S^1$ eine primitive p-te Einheitswurzel. Für eine natürliche Zahl $1 \leq q < p$ die zu p teilerfremd ist betrachten wir die Gruppenwirkung

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_p \times S^3 &\longrightarrow S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \\ (\xi, (z_1, z_2)) &\longmapsto (\xi z_1, \xi^q z_2) \end{aligned}$$

(i) Zeige, dass diese Gruppenwirkung eigentlich diskontinuierlich ist. Der Quotient ist also eine 3-Mannigfaltigkeit $L_{p,q}$ deren Fundamentalgruppe isomorph zu $\mathbb{Z}_p$ ist. Solche Mannigfaltigkeiten heißen Linsenräume.

(ii) Die Standard-Heegardzerlegung der 3-Sphäre ist

$$V = \{|z_1|^2 \leq 1/2\} \qquad\qquad V' = \{|z_1|^2 \geq 1/2\}$$

und wir identifizieren V mit $S^1 \times D^2$ durch

$$\begin{aligned} S^1 \times D^2 &\longrightarrow V \subset S^3 \\ (t, w) &\longmapsto \left(\frac{w}{\sqrt{2}}, t\left(1 - \frac{|w|^2}{2}\right)^{1/2}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Die Gruppenwirkung erhält die Komponenten der Heegardzerlegung. Benutze dies um eine Heegardzerlegung von $L_{p,q}$ anzugeben.

Hinweis. Sei $\nu \in \mathbb{N}$ eine Zahl mit der Eigenschaft $q\nu \equiv 1 \mod p$. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} S^1 \times D^2 &\longrightarrow S^1 \times D^2 \\ (t, w) &\longmapsto (t^p, t^{-\nu} w) \end{aligned} \tag{2}$$

Zeige,dass (2) einen Diffeomorphismus zwischen $V/\mathbb{Z}_p$ und dem Volltorus induziert.

(iii) Zeige, dass man so eine Heegardzerlegung von $L_{p,q}$ findet.

Aufgabe 3. Identifiziere in der vorangehenden Aufgabe die Isotopieklasse der Kurve in $\partial(V/\mathbb{Z}_p) \simeq \partial(S^1 \times D^2)$ die dem Meridian des komplementären Volltorus entspricht. Folgere, dass jede einfach geschlossene wesentliche Kurve in $\partial(S^1 \times D^2)$ (bis auf Isotopie) auftritt.

Beweise, dass jede geschlossene 3-Mannigfaltigkeit M, die eine Heegardzerlegung in zwei Volltori zulässt, ein Linsenraum oder $S^2 \times S^1$ ist.