LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

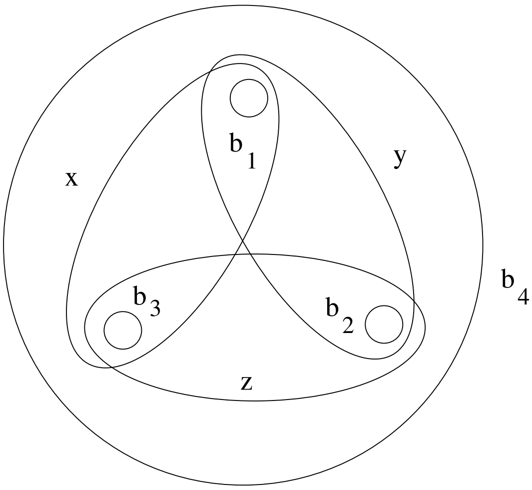
MATHEMATISCHES INSTITUT

SoSe 2015 Prof. Dr. Thomas Vogel

Niedrig-dimensionale Topologie

Blatt 6

Aufgabe 1. Sei $D_i^2 \subset D^2$ drei disjunkte Kreisscheiben und $\Sigma = D^2 \setminus \bigcup_{i=1,2,3} \mathring{D}_i^2$. In dieser Fläche mit Rand betrachten wir vier Kurven b_1, b_2, b_3, b_4 die jeweils zu einer der Randkomponenten parallel sind, sowie drei weiter Kurven x, y, z.



Sei γ eine eingebettete Kurve im Inneren von Σ und τ_γ der rechtshändige Dehn twist entlang γ. Zeige für die Konfiguration von Kurven in obiger Abbildung von Σ die Relation

$$\tau_z \circ \tau_y \circ \tau_x = \tau_{b_1} \circ \tau_{b_2} \circ \tau_{b_3} \circ \tau_{b_4}. \tag{1}$$

Aufgabe 2. Für eine Gruppe G bezeichnet $[G, G]$ den von den Kommutatoren $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ erzeugten Normalteiler.

Sei nun Σ_g eine Fläche von Geschlecht $g \geq 3$. Zeige, dass man die Fläche Σ aus der vorangehenden Aufgabe so nach Σ_g einbetten kann, dass keine der Kurven $x, y, z, b_1, b_2, b_3, b_4$ trennt. Verwende nun (1) und die Tatsache, dass $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ von Dehntwists entlang nicht trennender Kurven erzeugt wird, um zu zeigen, dass

$$\mathrm{Mod}(\Sigma_g)/[\mathrm{Mod}(\Sigma_g), \mathrm{Mod}(\Sigma_g)] = \{1\}.$$

Aufgabe 3. Für $x \in S^1$ betrachten wir die Faserung

$$\begin{aligned} \mathrm{Homeo}_+(S^1) &\longrightarrow S^1 \\ f &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Verwende diese Faserung um zu zeigen, dass

$$\pi_n(\mathrm{Homeo}_+(S^1), \mathrm{id}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } n = 1 \\ \{1\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 4. Wir betrachten den folgenden Graphen:

Ecken	Elemente $v \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$, so dass $v \neq kw$ mit $\pm 1 \neq k \in \mathbb{Z}$ mit $w \in \mathbb{Z}^2$.
Kanten	Ecken v, w sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn man durch $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen von v, w alle Elemente in $\mathbb{Z}^2$ erhält.

Zeige, dass dieser Graph zusammenhängend ist. Was für ein Zusammenhang besteht zu einfachen geschlossenen Kurven auf dem Torus?