SoSe 2015 Prof. Dr. Thomas Vogel

Niedrig-dimensionale Topologie

Blatt 5

Aufgabe 1. Sei G eine Gruppe und $g_1, \ldots, g_n \in G$ Elemente. Nehme an, dass G auf einer Menge X operiert und dass paarweise disjunkte Teilmengen $X_1, \ldots, X_n \subset X$ existieren so dass

$$g_i^k(X_j) \subset X_i \text{ für alle } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ und } i \neq j.$$

Beweise, dass die von $g_1, \ldots, g_n$ erzeugte Untergruppe von G frei ist.

Aufgabe 2. Wir betrachten die Operation $G = \mathrm{Sl}(2, \mathbb{Z})$ auf $X = \mathbb{Z}^2$ und $X_1 = \{(x, y) \mid |x| > |y|\}, X_2 = \{(x, y) \mid |y| > |x|\}$. Zeige, dass die Untergruppe von $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{Z})$, die von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird, frei ist falls $n \geq 2$.

Aufgabe 3. Seien a, b, c einfache geschlossene Kurven auf der orientierten geschlossenen Fläche Σ. Beweise, dass

$$i(\tau_a^k(b), b) \leq |k| i(a, c) i(a, b) + i(b, c).$$

Wähle nun einen Repräsentanten b' für $\tau_a^k(b)$ so dass b' und b minimale Schnittzahl haben. Zeige dann, dass man $\gamma \sim c$ so wählen kann, dass γ jede der Kurven b und b' in der kleinstmöglichen Anzahl von Punkten schneidet. Folgere

$$k i(a, b) i(a, c) \leq |(b \cup b') \cap \gamma| = i(\tau_a^k(b), c) + i(b, c).$$

Aufgabe 4. Sei a, b einfach geschlossene Kurven auf einer orientierten Fläche Σ so dass $i(a, b) \geq 2$. Wir betrachten die Operation der von τ_a, τ_b erzeugten Gruppe $G_{a,b}$ auf der Menge

$$X = \{\text{Isotopieklassen einfacher geschlossener Kurven auf } \Sigma\}.$$

Wir betrachten die Teilmengen

$$X_a = \{c \in X \mid i(c, b) > i(c, a)\}$$
$$X_b = \{c \in X \mid i(c, a) > i(c, b)\}$$

von X. Zeige, dass $G_{a,b}$ frei ist.