SoSe 2015 Prof. Dr. Thomas Vogel

Niedrig-dimensionale Topologie

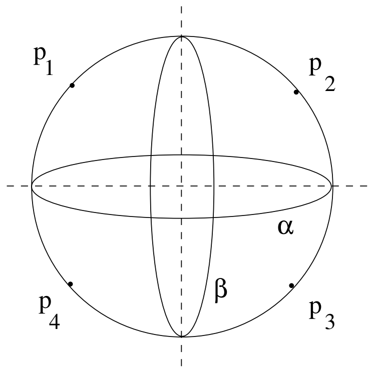
Blatt 4

Aufgabe 1. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned}\sigma : T^2 \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 &\longrightarrow T^2 \\ (x,y) &\longmapsto (-x,-y).\end{aligned}$$

Bestimme die Fixpunkte und zeige, dass der Quotient $T^2/(\sigma(x) \sim x)$ eine Sphäre ist. Wir fassen die Bilder der Fixpunkte als markierte Punkte auf.

Aufgabe 2. Auf S^2 wählt man zwei wesentliche Kurven α, β, welche die vier markierten Punkte $p_1, \ldots, p_4$ vermeiden und zwei Schnittpunkte haben.



Zeige, dass α und β sich zu geschlossenen Kurven auf T^2 heben (bzgl. der Überlagerung aus Aufgabe 1). Verwende dies um eine Abbildung

$$\rho : \mathrm{Mod}(S^2, p_1, \ldots, p_4) \longrightarrow \mathrm{Mod}(T^2)/\langle\sigma\rangle \cong \mathrm{Sl}(2,\mathbb{Z})/\pm \mathrm{Id} =: \mathrm{PSl}(2,\mathbb{Z})$$

anzugeben. Zeige, dass es eine Abbildung surjektiv ist und ein Rechtsinverses hat.

Aufgabe 3. Wir betrachten die 2-Sphäre mit 4 markierten Punkten und wollen alle (bis auf Isotopie) einfachen geschlossenen Kurven auf S^2 finden, die nicht keinen oder nur einen der markierten Punkte umlaufen (und keinen solchen Punkt treffen). Solche Kurven nennen wir wesentlich. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine effektive Konstruktion von wesentlichen Kurven zu finden. (Es ist nicht unbedingt nötig ,die Kurven zu orientieren.)

- Sei γ eine wesentlich Kurve auf S^2 so dass $i(\beta, \gamma)$ minimal ist. Wir schneiden S^2 entlang von β in zwei Hälften. Zeige, dass kein Bogen von γ in einer der Hälften zusammen mit einem Bogen von β eine Scheibe berandet die keinen markierten Punkt enthält.

- Isotopiere die Bögen von γ in einer der Hälften so dass sie parallel zu dem Bogen von α und in einer kleinen Umgebung davon verlaufen.
- In der anderen Hälfte sind die Bögen von γ frei homotop zum Bogen von α. Sei p die Anzahl dieser Bögen. Leite daraus eine Konstruktion von γ aus p Kurven die jeweils isotop zu α sind ab. (Die Kurven haben minimalen Schnitt mit β und die Konstruktion von γ kann in einer Umgebung von β ausgeführt werden
- Folgere, dass γ zu einer einfach geschlossenen Kurve in $T^2 \setminus \{\text{Fixpunkte von } \sigma\}$ hochgehoben werden kann.

Aufgabe 4. Seien $f, g : S^2 \longrightarrow S^2$ die Rotationen um 180° um die gestrichelten Achsen in der Abbildung. Diese Achsen gehen durch den Mittelpunkt der Sphäre, sind orthogonal. Wir nehmen an, dass diese Rotationen die Menge $\{p_1, \ldots, p_4\}$ erhält.

- Beweise, dass $f \circ g = g \circ f$ und $f^2 = g^2 = \mathrm{id}$.
- Zeige, dass der Kern von ρ von f, g erzeugt wird und isomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ist.