SoSe 2015 Prof. Dr. Thomas Vogel

Niedrig-dimensionale Topologie

Blatt 3

Aufgabe 1. Sei γ_1, γ_2 sowie γ_1', γ_2' zwei Kurven auf der orientierten, geschlossenen Fläche Σ_g so dass $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \gamma_1' \cap \gamma_2' = \emptyset$. Wenn man Σ_g entlang γ_1, γ_2 aufschneidet, so erhält man eine Fläche mit Rand mit genau zwei Zusammenhangskomponenten von denen eine Geschlecht k hat, die analoge Aussage gelte auch für γ_1', γ_2'.

Beweise, dass ein Homöomorphismus ϕ von Σ_g existiert, so dass $\phi(\gamma_i) = \gamma_i'$ für $i = 1, 2$.

Aufgabe 2. Verwende die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = T^2 &\longrightarrow \mathrm{Homeo}_0(T^2) \\ (a,b) &\longmapsto \big(\varphi_{a,b}(x,y) = (x+a, y+b)\big) \end{aligned}$$

um zu zeigen, dass $\pi_1(T^2) \subset \pi_1(\mathrm{Homeo}_0(T^2))$. Insbesondere ist $\mathrm{Homeo}_0(T^2)$ nicht zusammenziehbar.

Aufgabe 3. Zeige, dass $\mathrm{Homeo}_*(S^2)$ zusammenhängend ist.

Hinweis: Sei $f \in \mathrm{Homeo}_*(S^2)$. Betrachte einen Großkreis γ in $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, sowie drei Punkte A, B, C auf dem Großkreis. Zeige zuerst, dass $f(\gamma)$ isotop zum eindeutig bestimmten Euklidischen Kreis durch $f(A), f(B), f(C)$ ist. Verwende dazu den Jordanschen Kurvensatz, den Alexander Trick sowie die Tatsache, dass $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 4. Sei $g \geq 2$ und P ein gleichwinkliges Polygon mit $4g + 2$ Seiten. Wir identifizieren gegenüberliegende Seiten so dass die entstehende Fläche orientierbar ist. Zeige, dass die entstehende Fläche Geschlecht g hat.

Gebe einen nicht trivialen Homöomorphismus φ von Σ_g an, so dass $\varphi^{4g+2} = 1 \in \mathrm{Mod}(\Sigma_g)$.