LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

SoSe 2015 Prof. Dr. Thomas Vogel

Niedrig-dimensionale Topologie

Blatt 2

Sei G eine Gruppe. Das Zentrum von G ist definiert als

$$Z(G) = \{g \in G \,|\, gh = hg \text{ für alle } h \in G\}.$$

Für ein Element h von G ist der Zentralisator von h

$$Z(h) = \{g \in G \,|\, gh = hg\}.$$

Alle Flächen in den Aufgaben sind zusammenhängend.

Aufgabe 1. Sei Σ eine kompakte, orientierbare Fläche mit Geschlecht $g \geq 2$. Zeige dass $\pi_1(\Sigma)$ das amalgamierte Produkt von zwei nicht-trivialen freien Gruppen ist. Folgere, dass $Z(\pi_1(\Sigma)) = \{1\}$. (Verwende den Satz von Seifert-van Kampen.)

Sei $h \neq 1$. Was kann man über den Zentralisator von h sagen?

Aufgabe 2. Eine Gruppe ist torsionsfrei, falls für $g \neq 1$ auch für jede positive Potenz g^n gilt $g^n \neq 1$.

Zeige mit Hilfe von Aufgabe 1, dass die Fundamentalgruppe einer orientierbaren Fläche torsionsfrei ist.

Aufgabe 3. Sei Σ eine geschlossene orientierbare Fläche und $\gamma : S^1 \longrightarrow \Sigma$ sei eine einfache Kurve die nicht nullhomotop ist. Zeige, dass γ nicht frei homotop zu einer Potenz $g^n \in \pi_1(\Sigma)$ mit $n \neq 1$ ist.

Hinweis: Nehme an, die Aussage ist falsch, und betrachte die Überlagerung $\widetilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$ die der Untergruppe $\langle g \rangle \subset \pi_1(\Sigma)$ entspricht. Identifiziere $\widetilde{\Sigma}$, hebe nun γ in diese Überlagerung.

Aufgabe 4. Zeige, dass die Gruppen

$$G_1 = \langle a, b \,|\, a^2 b^2 = 1 \rangle$$
$$G_2 = \langle x, y \,|\, x y x^{-1} y = 1 \rangle$$

isomorph sind (Kleinsche Flasche). Bestimme das Zentrum dieser Gruppe.

Aufgabe 5. Sei Σ_g eine geschlossene orientierte Fläche von Geschlecht g. Welche geschlossenen Flächen treten als Überlagerungen von Σ_g auf?

Aufgabe 6. Seien $g, h \in \mathbb{N}$. Wann gibt es eine Abbildung $f : \Sigma_{h,or} \longrightarrow \Sigma_{g,or}$ deren Abbildungsgrad $\neq 0$ ist?

Hinweis: Poincaré-Dualität

Erinnerung: Sei $f : M \longrightarrow N$ eine stetige Abbildung zwischen kompakten orientierten Mannigfaltigkeiten der Dimension n. Dann ist der Abbildungsgrad definiert als diejenige Zahl d mit der Eigenschaft $f^*(k) = dk$ wobei

$$f^* : \mathbb{Z} = H^n(N, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$