SoSe 2015 Prof. Dr. Thomas Vogel

Niedrig-dimensionale Topologie

Blatt 1

Sei K ein in S^2 eingebetteter Graph, so dass

- je zwei Ecken höchstens eine Kante gemeinsam haben,
- jede Ecke ist Endpunkt mindestens dreier Kanten und
- die beiden Endpunkte jeder Kante sind verschieden.

In den beiden ersten Aufgaben sollen Sie beweisen, dass man die Ecken mit fünf Farben so einfärben kann, dass benachbarte Ecken verschiedene Farben haben. (Tatsächlich reichen sogar nur vier Farben.)

Aufgabe 1. Zeige, dass es eine Ecke gibt, von der höchstens fünf Kanten ausgehen.

Aufgabe 2. Beweise nun die obige Behauptung durch Induktion nach der Anzahl der Ecken.

Hinweis: Der einzig schwierige Fall tritt auf, wenn es keine Ecke gibt von der drei oder vier Kanten ausgehen. Dann sei P eine Ecke, von der fünf Kanten ausgehen. Wir entfernen P und alle Kanten welche von P ausgehen. Die so entstandenen Graphen kann man auf die wie gewünscht einfärben.

Wenn alle Nachbarn von P verschiedene Farben haben, wähle zwei nicht benachbarte Kanten die von P ausgehen. Diese Kanten enden an den Ecken P_r (rot) und P_g (grün).

Unterscheiden Sie zwei Fälle: Entweder es gibt keinen Weg der P_r mit P_g verbindet, ohne P zu durchlaufen und nur rote/grüne Ecken trifft, oder es gibt einen solchen Weg.

Im beiden Fällen kann man die Einfärbung so abändern, dass die Nachbarn von P nur vier verschiedene Farben haben.

Aufgabe 3. Zeige, dass eine glatte Fläche Σ genau dann orientierbar ist, wenn es keine (topologische) Einbettung des Möbiusbands nach Σ gibt.

Aufgabe 4. Sei Σ eine glatte Fläche. Beweise, dass Σ trianguliert werden kann. Wähle dazu eine abzählbare Überdeckung mit Karten (U_i, φ_i), so dass es kompakte, glatt eingebettete, abgeschlossene Scheiben D_i', D_i gibt, derart dass

$$D_i' \subset \mathring{D}_i \subset D_i \subset U_i$$

und $\Sigma = \bigcup_i D_i'$.

Verwenden Sie zum Beispiel den Transversalitätssatz von Thom sowie den Satz von Jordan-Schönflies (jede eingebettete geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2$ berandet eine Scheibe). In dieser Aufgabe brauchen Sie nur die Version für stückweise glatte Kurven.

Aufgabe 5. Sei Σ eine Fläche vom Geschlecht g. Zeige, dass es in Σ eine Familie eingebetteter, paarweise disjunkter geschlossener Kurven $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ gibt, so dass $\Sigma \setminus (\gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_g)$ zusammenhängend ist. Beweise weiter, dass man keine weitere Kurve γ_{g+1} hinzufügen kann, ohne dass $\Sigma \setminus (\gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_{g+1})$ unzusammenhängend ist.