MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Priv.-Doz. Dr. P. Schuster
Dr. E. Stockmeyer

Sommersemester 2005

Übungen zur Analysis III — Blatt 9

1. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heisst *Lebesgue-meßbar*, wenn $\chi_M \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}^n)$ ist. Man zeige, dass $\mathcal{M} := \{M \subset \mathbb{R}^n : M \quad \text{Lebesgue-meßbar}\}$ eine $\sigma-$*Algebra* ist, d.h. dass gilt:

   (a) $\emptyset \in \mathcal{M}$

   (b) $M \in \mathcal{M} \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus M \in \mathcal{M}$

   (c) $\forall k \in \mathbb{N}\,(M_k \in \mathcal{M}) \Rightarrow \cup_{k\in\mathbb{N}} M_k \in \mathcal{M}$

2. Man zeige, dass jede offene oder abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-meßbar ist.

3. Man zeige, dass ein Kreissektor mit Radius r und Öffnungswinkel α den Flächeninhalt $\frac{1}{2}r^2\alpha$ hat.

4. Man zeige, dass die Ellipse

$$E := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1,\ a,b > 0\right\}$$

   den Flächeninhalt πab hat.

   Hinweis: Man benutze die Transformation $x = ar\cos\theta, \quad y = br\sin\theta$.

Abgabe: Dienstag, 14.06.05, 16 Uhr s.t., Übungskasten im 1. Stock vor Bibliothek. Dieses Blatt zählt zu den Soll-Leistungen für den Übungsschein, jedoch werden **nur von zwei** Teilnehmern gemeinsam abgegebene Lösungen korrigiert.

Aufgabenblätter: `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~stock`