

Lösung zum Blatt 3, Aufgabe 3,4

- Man berechne die Integrale

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \, dx \quad (m, n \in \mathbb{Z}).$$

Lösung

Wir beobachten, dass für $a, b \in \mathbb{R}$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \quad \text{d.h.,}$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2} (\sin(a + b) - \sin(a - b))$$

damit gilt, dass

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(m + n)x \, dx - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(m - n)x \, dx$$

Nun betrachten wir für $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin kx \, dx &= \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \sin kx \, d(kx) = \frac{1}{k} \int_0^{2\pi k} \sin t \, dt = \frac{1}{k} (-\cos t) \Big|_0^{2\pi k} \\ &= \frac{1}{k} (-\cos 2\pi k + \cos 0) = 0 \end{aligned}$$

daher folgt, dass

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0.$$

- Man berechne die unbestimmten Integrale

$$\text{a) } \int \frac{\ln(\ln x)}{x} \, dx, \quad \text{b) } \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

unter Angabe ihres Definitionsbereichs.

Lösung

a) Wir brauchen $\ln x > 0$ d.h., $x > 1$.

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \int \ln(\ln x) d(\ln x)$$

Durch Partielle Integration d.h., $\int f dg = fg - \int gdf$, mit $g = \ln x$, $dg = d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$, $f = \ln(\ln x)$ und $df = \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x} dx$ bekommen wir

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \ln(\ln x) \ln x - \int \frac{1}{x} dx = \ln x (\ln(\ln x) - 1) \quad \text{für alle } x > 1.$$

b) In diesem Fall betrachten wir nur $x \in (-1, 1)$. Wir setzen $x = \cos \theta$ mit $\theta \in (0, \pi)$, dann ist $\theta = \arccos x$ und $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$. Es gilt auch, dass $dx = d(\cos \theta) = -\sin \theta d\theta$. Daraus folgt, dass

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int \frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{1-\cos^2 \theta}} \sin \theta d\theta = - \int \cos^2 \theta d\theta = - \int \cos \theta d(\sin \theta)$$

Nach Partieller Integration mit $f = \cos \theta$, $df = -\sin \theta d\theta$, $g = \sin \theta$ und $dg = \cos \theta d\theta$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int \cos^2 \theta d\theta &= \cos \theta \sin \theta + \int \sin^2 \theta d\theta = \cos \theta \sin \theta + \int d\theta - \int \cos^2 \theta d\theta \\ \Leftrightarrow \int \cos^2 \theta d\theta &= \frac{1}{2} \left(\cos \theta \sin \theta + \int d\theta \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \theta \sin \theta + \frac{\theta^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos \theta \sqrt{1 - \cos^2 \theta} + \frac{\theta^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Da $\theta = \arccos(x)$, gilt

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \left(x \sqrt{1-x^2} + \frac{\arccos^2(x)}{2} \right) \quad \text{für alle } x \in (-1, 1).$$