MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Sommersemester
2004

E. Stockmeyer

Lösung zum Blatt 3, Aufgabe 3,4

• Man berechne die Integrale

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \, dx \quad (m, n \in \mathbb{Z})\,.$$

Lösung
Wir beobachten, dass für $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \quad \text{d.h.,}\\ \cos a \sin b &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right)\end{aligned}$$

damit gilt, dass

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(m+n)x \, dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(m-n)x \, dx$$

Nun betrachten wir für $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin kx \, dx = \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} \sin kx \, d(kx) = \frac{1}{k}\int_0^{2\pi k} \sin t \, dt = \frac{1}{k}(-\cos t)\Big|_0^{2\pi k}\\ = \frac{1}{k}(-\cos 2\pi k + \cos 0) = 0\end{aligned}$$

daher folgt, dass

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0.$$

• Man berechne die unbestimmten Integrale

$$\text{a)} \quad \int \frac{\ln(\ln x)}{x} \, dx, \quad \text{b)} \quad \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

unter Angabe ihres Definitionsbereichs.

Lösung

a) Wir brauchen $\ln x > 0$ d.h., $x > 1$.

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx = \int \ln(\ln x)\,d(\ln x)$$

Durch Partielle Integration d.h., $\int f dg = fg - \int g df$, mit $g = \ln x, dg = d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$, $f = \ln(\ln x)$ und $df = \frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}dx$ bekommen wir

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx = \ln(\ln x)\ln x - \int \frac{1}{x}dx = \ln x(\ln(\ln x) - 1) \quad \text{für alle } x > 1.$$

b) In diesem Fall betrachten wir nur $x \in (-1, 1)$. Wir setzen $x = \cos\theta$ mit $\theta \in (0, \pi)$, dann ist $\theta = \arccos x$ und $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$. Es gilt auch, dass $dx = d(\cos\theta) = -\sin\theta d\theta$. Daraus folgt, dass

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int \frac{\cos^2\theta}{\sqrt{1-\cos^2}}\,\sin\theta d\theta = -\int \cos^2\theta d\theta = -\int \cos\theta\,d(\sin\theta)$$

Nach Partieller Integration mit $f = \cos\theta, df = -\sin\theta d\theta$, $g = \sin\theta$ und $dg = \cos\theta d\theta$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int \cos^2\theta\,d\theta = \cos\theta\,\sin\theta + \int \sin^2\theta d\theta = \cos\theta\,\sin\theta + \int d\theta - \int \cos^2\theta\,d\theta \\
&\Leftrightarrow \int \cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\left(\cos\theta\,\sin\theta + \int d\theta\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\theta\,\sin\theta + \frac{\theta^2}{2}\right) \\
&\quad = \frac{1}{2}\left(\cos\theta\sqrt{1-\cos^2\theta} + \frac{\theta^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

Da $\theta = \arccos(x)$, gilt

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \frac{\arccos^2(x)}{2}\right) \quad \text{für alle } x \in (-1, 1).$$