MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Sommersemester
2004

E. Stockmeyer

# Lösung zum Blatt 2, Aufgabe 2

• Sei $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$.
Man verifiziere $\int_0^{1\,*} \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)\,dx = 1$ und $\int_{0\,*}^1 \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)\,dx = 0$.

**Lösung**
Wir setzen $f(x) \equiv \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$, für alle $x \in [0,1]$. Aus der Definition folgt

$$\int_0^{1\,*} f(x)\,dx = \inf\left\{\int_0^1 \varphi(x)dx \,|\, \varphi \in T[0,1],\ \varphi \geqslant f\right\}.$$

Aber $\varphi \geqslant f$ ist äquivalent zu: $\varphi(x) \geqslant f(x)$, $\forall x \in [0,1]$, und $\varphi \in T[0,1]$ bedeutet, dass eine Unterteilung

$$\mathcal{Z} : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$$

existiert mit

$$\varphi|_{]x_{k-1},x_k[} = C_k \geqslant f|_{]x_{k-1},x_k[},\ \forall k = 1,\ldots,n.$$

Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, gilt

$$\max\{f|_{]x_{k-1},x_k[}\} = 1, \text{ für alle } k \text{ und } \mathcal{Z}.$$

Also ist $C_k \geqslant 1$. Damit ist für beliebiges $\mathcal{Z}$

$$\int_0^1 \varphi(x)dx = \sum_{k=1}^n C_k(x_k - x_{k-1}) \geqslant \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = 1.$$

Daher ist $1 = \inf\left\{\int_0^1 \varphi(x)dx \,|\, \varphi \in T[0,1],\ \varphi \geqslant f\right\}$ und

$$\int_0^{1\,*} f(x)\,dx = 1.$$

Analoge Vorgangsweise für $\int_{0\,*}^1 f(x)\,dx$.