

## Übungen zur Analysis II

## Blatt 9

1. Man zeige:

(a) Wird  $\mathcal{C}[0, 1]$  mit der  $L_1$ -Norm  $\| \cdot \|_1$  versehen (Blatt 8, Aufgabe 4), so ist

$$\mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(1)$$

linear und surjektiv, aber nicht stetig.

(b) Die Abbildung

$$g : [0, 1[ \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, t \mapsto e^{2\pi it}$$

ist bijektiv und stetig, aber nicht topologisch.

2. Es sei  $X$  eine Menge,  $Y$  ein normierter Raum,  $f : X \rightarrow Y$  und  $f_n : X \rightarrow Y$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Ist  $Y$  diskret (Blatt 8, Aufgabe 1), so charakterisiere man

(a)  $(f_n)$  konvergiert punktweise gegen  $f$

(b)  $(f_n)$  konvergiert gleichmäßig gegen  $f$

durch Angabe von dazu äquivalenten Formeln, die ausschließlich die Zeichen

$$\forall, \exists, \geq, =, \in, (, ), \mathbb{N}, X, N, n, x, f_n, f$$

enthalten.

3. (a) Man zeige, daß jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raums total beschränkt ist, und widerlege die Umkehrung dieser Aussage mit Hilfe des Beispiels  $\{1/n : n > 1\}$  aus der Vorlesung.

(b) Man zeige: Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine gleichmäßig stetige Abbildung metrischer Räume und  $A \subseteq X$ , so gilt

$$A \text{ total beschränkt} \Rightarrow f(A) \text{ total beschränkt.}$$

4. Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler normierter Raum. Man zeige:

- (a) Jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von  $V$  ist kompakt.
- (b) Ist  $W$  ein normierter Raum und  $f : V \rightarrow W$  linear, so ist  $\max_{\|x\|=1} \|f(x)\|$  die kleinste Konstante  $\gamma \geq 0$  mit  $\|f(x)\| \leq \gamma \|x\|$  für alle  $x \in V$ .

5. Ein metrischer Raum  $X$  hat die *endliche Durchschnittseigenschaft*, wenn für jede Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  abgeschlossener Teilmengen von  $X$  gilt

$$\forall N \in \mathbb{N} \left( \bigcap_{n \leq N} A_n \neq \emptyset \right) \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset.$$

Man zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i)  $X$  ist folgenkompakt.
- (ii)  $X$  hat die endliche Durchschnittseigenschaft.
- (iii) Jede offene Überdeckung  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $X$  hat eine endliche Teilüberdeckung.

*Hinweis:* Um (ii) aus (i) zu folgern, kann man  $A_n \supseteq A_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  annehmen. In der Gegenrichtung betrachte man zu jeder Folge  $(x_n)$  in  $X$  die Folge der abgeschlossenen Teilmengen  $A_n = \overline{\{x_k : k \geq n\}}$  von  $X$ .

6. Gegeben sei die Kurve

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3 + x^2\}.$$

Man zeige: Zu jedem Punkt  $(x, y) \in C$  gibt es ein  $t \in \mathbb{R}$  mit

$$(x, y) = (t^2 - 1, t^3 - t),$$

welches für  $(x, y) \neq (0, 0)$  eindeutig bestimmt ist.

7. Für  $a < b$  und

$$\lambda_{a,b} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto e^{(2\pi i + 1)t}$$

sei  $L_{a,b}$  die Länge der rektifizierbaren ebenen Kurve  $\lambda_{a,b}$ . Man zeige

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} L_{a,b} = \sqrt{4\pi^2 + 1} \cdot |\lambda_{a,b}(b)|.$$

8. (a) Es sei  $n \geq 1$  und  $a < b$ . Man zeige: Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine rektifizierbare Kurve, so ist deren Länge  $L$  mindestens gleich der Länge jedes in  $\gamma$  eingeschriebenen Polygonzugs, d.h. es gilt

$$L \geq \sum_{i=1}^N \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

für alle Zerlegungen  $a = t_0 < \dots < t_N = b$  von  $[a, b]$ .

(b) Man zeige, daß die ebene Kurve

$$\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } t = 0 \\ (t, t \cdot \sin(1/t)) & \text{sonst} \end{cases}$$

stetig, aber nicht rektifizierbar ist.

9. \* Es sei  $a < b$ . Für jede Funktion  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  sei

$$A_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, 0 < y < f(x)\}.$$

(a) Man zeige: Ist  $f$  stetig, so ist  $A_f$  offen.

(b) Man gebe ein Beispiel eines unstetigen  $f$  mit nicht offenem  $A_f$  an.

(c) Man widerlege, daß  $f$  stetig sein muß, wenn  $A_f$  offen ist.

10. \* Man beweise oder widerlege: Ist  $f: X \rightarrow Y$  ein Homöomorphismus metrischer Räume, so gilt

$$X \text{ vollständig} \Rightarrow Y \text{ vollständig.}$$

*Hinweis:* Warum konnte diese Implikation in dem Falle bewiesen werden, daß  $f: X \rightarrow Y$  sogar ein topologischer Isomorphismus normierter Räume ist?

11. \* Es sei  $\omega$  eine reelle Konstante. Die Kurve  $C(\omega)$  sei durch folgende Parameterdarstellung gegeben:

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (2 \cos t + \cos(\omega t), 2 \sin t - \sin(\omega t)).$$

(a) Man skizziere die Kurven  $C(1)$ ,  $C(2)$  und  $C(3)$ .

(b) Man beweise: Genau dann ist  $\omega$  rational, wenn  $\varphi$  periodisch ist, d.h. wenn es eine Konstante  $L > 0$  gibt mit  $\varphi(t + L) = \varphi(t)$  für alle  $t$ .

(c) Man untersuche, für welche Parameterwerte  $t$  die Kurve  $C(2)$  singulär ist.

*Es sind mindestens sechs der Aufgaben 1 - 8 zu bearbeiten; die mit \* markierten Aufgaben 9 - 11 sind fakultativ.*

**Abgabe:** Dienstag, 11. Januar 2005, 14 Uhr s.t., Übungskasten im 1. Stock.

**Aufgabenblätter:** <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~stock>

*Frohe Weihnachten und ein gutes Neues Jahr!*