MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Priv.-Doz. Dr. P. Schuster
Dr. E. Stockmeyer

Wintersemester
2004/05

Übungen zur Analysis II **Blatt 9**

1. Man zeige:

   (a) Wird $\mathcal{C}[0,1]$ mit der L_1-Norm $\|\_\|_1$ versehen (Blatt 8, Aufgabe 4), so ist

   $$\mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(1)$$

   linear und surjektiv, aber nicht stetig.

   (b) Die Abbildung

   $$g : [0,1[\to \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},\ t \mapsto e^{2\pi it}$$

   ist bijektiv und stetig, aber nicht topologisch.

2. Es sei X eine Menge, Y ein normierter Raum, $f : X \to Y$ und $f_n : X \to Y$ für $n \in \mathbb{N}$. Ist Y diskret (Blatt 8, Aufgabe 1), so charakterisiere man

   (a) (f_n) konvergiert punktweise gegen f

   (b) (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f

   durch Angabe von dazu äquivalenten Formeln, die ausschließlich die Zeichen

   $$\forall,\ \exists,\ \geqslant,\ =,\ \in,\ (,\ ),\ \mathbb{N},\ X,\ N,\ n,\ x,\ f_n,\ f$$

   enthalten.

3. (a) Man zeige, daß jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raums total beschränkt ist, und widerlege die Umkehrung dieser Aussage mit Hilfe des Beispiels $\{1/n : n > 1\}$ aus der Vorlesung.

   (b) Man zeige: Ist $f : X \to Y$ eine gleichmäßig stetige Abbildung metrischer Räume und $A \subseteq X$, so gilt

   $$A \text{ total beschränkt } \Rightarrow\ f(A) \text{ total beschränkt.}$$

4. Es sei V ein endlichdimensionaler normierter Raum. Man zeige:

   (a) Jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von V ist kompakt.

   (b) Ist W ein normierter Raum und $f : V \to W$ linear, so ist $\max_{\|x\|=1} \|f(x)\|$ die kleinste Konstante $\gamma \geqslant 0$ mit $\|f(x)\| \leqslant \gamma \|x\|$ für alle $x \in V$.

5. Ein metrischer Raum X *hat die endliche Durchschnittseigenschaft*, wenn für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener Teilmengen von X gilt

$$\forall N \in \mathbb{N} \left(\bigcap_{n \leqslant N} A_n \neq \emptyset \right) \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset\,.$$

   Man zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (i) X ist folgenkompakt.

   (ii) X hat die endliche Durchschnittseigenschaft.

   (iii) Jede offene Überdeckung $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von X hat eine endliche Teilüberdeckung.

   Hinweis: Um (ii) aus (i) zu folgern, kann man $A_n \supseteq A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen. In der Gegenrichtung betrachte man zu jeder Folge (x_n) in X die Folge der abgeschlossenen Teilmengen $A_n = \overline{\{x_k : k \geqslant n\}}$ von X.

6. Gegeben sei die Kurve

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3 + x^2\}.$$

   Man zeige: Zu jedem Punkt $(x, y) \in C$ gibt es ein $t \in \mathbb{R}$ mit

$$(x, y) = (t^2 - 1, t^3 - t),$$

   welches für $(x, y) \neq (0, 0)$ eindeutig bestimmt ist.

7. Für $a < b$ und

$$\lambda_{a,b} \colon [a, b] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto e^{(2\pi i+1)t}$$

   sei $L_{a,b}$ die Länge der rektifizierbaren ebenen Kurve $\lambda_{a,b}$. Man zeige

$$\lim_{a\to-\infty} L_{a,b} = \sqrt{4\pi^2 + 1} \cdot |\lambda_{a,b}(b)|.$$

8. (a) Es sei $n \geqslant 1$ und $a < b$. Man zeige: Ist $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine rektifizierbare Kurve, so ist deren Länge L mindestens gleich der Länge jedes in γ einbeschriebenen Polygonzugs, d.h. es gilt

$$L \geqslant \sum_{i=1}^{N} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

   für alle Zerlegungen $a = t_0 < \ldots < t_N = b$ von $[a, b]$.

(b) Man zeige, daß die ebene Kurve

$$\sigma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } t = 0 \\ (t, t \cdot \sin(1/t)) & \text{sonst} \end{cases}$$

stetig, aber nicht rektifizierbar ist.

9. * Es sei $a < b$. Für jede Funktion $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ sei

$$A_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b,\ 0 < y < f(x)\}.$$

(a) Man zeige: Ist f stetig, so ist A_f offen.

(b) Man gebe ein Beispiel eines unstetigen f mit nicht offenem A_f an.

(c) Man widerlege, daß f stetig sein muß, wenn A_f offen ist.

10. * Man beweise oder widerlege: Ist $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus metrischer Räume, so gilt

$$X \text{ vollständig } \Rightarrow Y \text{ vollständig.}$$

Hinweis: Warum konnte diese Implikation in dem Falle bewiesen werden, daß $f : X \to Y$ sogar ein topologischer Isomorphismus normierter Räume ist?

11. * Es sei ω eine reelle Konstante. Die Kurve $C(\omega)$ sei durch folgende Parameterdarstellung gegeben:

$$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (2\cos t + \cos(\omega t), 2\sin t - \sin(\omega t)).$$

(a) Man skizziere die Kurven $C(1)$, $C(2)$ und $C(3)$.

(b) Man beweise: Genau dann ist ω rational, wenn φ periodisch ist, d.h. wenn es eine Konstante $L > 0$ gibt mit $\varphi(t + L) = \varphi(t)$ für alle t.

(c) Man untersuche, für welche Parameterwerte t die Kurve $C(2)$ singulär ist.

*Es sind mindestens sechs der Aufgaben 1 - 8 zu bearbeiten; die mit * markierten Aufgaben 9 - 11 sind fakultativ.*

Abgabe: Dienstag, 11. Januar 2005, 14 Uhr s.t., Übungskasten im 1. Stock.

Aufgabenblätter: `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~stock`

Frohe Weihnachten und ein gutes Neues Jahr!