MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Wintersemester
2004/05

Priv.-Doz. Dr. P. Schuster
Dr. E. Stockmeyer

Übungen zur Analysis II — Blatt 8

1. Es seien X, Y metrische Räume, $A \subset X$ und $a \in A$. Man nennt a einen *isolierten Punkt* von A, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $A \cap B_\varepsilon(a) = \{a\}$; man nennt A *diskret*, wenn jedes $a \in A$ ein isolierter Punkt von A ist. Man zeige :

   (a) $A = \{1/n : n \geqslant 1\}$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik ist diskret, aber $A \cup \{0\}$ ist nicht diskret.

   (b) Ist a ein isolierter Punkt von A, so ist jede Abbildung $f : A \to Y$, stetig in a. Insbesondere gilt : Ist A diskret, so ist jede Abbildung $f : A \to Y$ stetig.

2. Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ und

   $$d_A \colon X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

   Man zeige:

   (a) d_A ist stetig.

   (b) Es gilt

   $$d_A(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \overline{A}$$

   für alle $x \in X$. (5)

3. Man prüfe, ob die Funktion

   $$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   an der Stelle $(0, 0)$ stetig ist. (5)

4. Man zeige, daß der Vektorraum $\mathcal{C}([0, 1])$ aller stetigen reellwertigen Funktionen auf $[0, 1]$ zusammen mit der L^1-Norm

   $$\|\_\|_1 \colon f \mapsto \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

   nicht vollständig ist. (5)

Abgabe: Dienstag, 14.12.2004, 14:00 Uhr s.t., Übungskasten im 1. Stock.

Aufgabenblätter: `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~stock`