

Übungen zur Analysis II

Blatt 7

1. Für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$\|x\|' = |x_1| + \frac{1}{2}|x_2|.$$

- (a) Man zeige, daß $\|-\|'$ eine Norm auf \mathbb{R}^2 ist.
(b) Man skizziere die Einheitsvollkugel

$$\overline{B}(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|' \leq 1\}$$

in \mathbb{R}^2 bezüglich der Norm $\|-\|'$. (5)

2. Es bezeichne X die Menge aller Folgen komplexer Zahlen. Man zeige, daß durch

$$d((a_n), (b_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \frac{|a_n - b_n|}{1 + |a_n - b_n|} \quad ((a_n), (b_n) \in X)$$

eine Metrik auf X definiert wird. (5)

3. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Man zeige

- (a) (Vierecksungleichung)

$$|d(a, b) - d(c, d)| \leq d(a, c) + d(b, d)$$

für alle $a, b, c, d \in X$.

- (b) Ist (x_n) eine Cauchy-Folge in X , die einen Häufungspunkt $a \in X$ hat, so konvergiert (x_n) gegen a . (5)

4. (a) Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Man zeige, dass der Rand ∂A jeder beliebiger Teilmenge A von X abgeschlossen ist.

- (b) Man gebe eine abgeschlossene, aber nicht vollständige Teilmenge A eines metrischen Raums (X, d) an. (5)

Abgabe: Dienstag, 07.12.2004, 14:00 Uhr s.t., Übungskasten im 1. Stock vor Bibliothek.

Aufgabenblätter: <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~stock>