MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Priv.-Doz. Dr. P. Schuster
Dr. E. Stockmeyer

Wintersemester
2004/05

Übungen zur Analysis II — Blatt 5

1. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine komplexwertige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt Riemann-integrierbar, wenn Real- und Imaginärteil
$$\mathrm{Re} f : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{Re} f(x) \quad \text{und} \quad \mathrm{Im} f : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{Im} f(x)$$
Riemann-integrierbare reellwertige Funktionen sind; dann setzt man
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \mathrm{Re} f(x)\,dx + i \int_a^b \mathrm{Im} f(x)\,dx\,.$$
Man zeige: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar, so ist auch $|f| : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, und es gilt (5)
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

2. Man bestimme die Taylor-Entwicklung der Wurzelfunktion an der Stelle 2. (5)

3. (a) Man bestimme Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $(1 + i)^{2004}$.
   (b) Man bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 = -1 + i$ (2+3)

4. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ gegeben. Man betrachte die Geraden
$$g_x := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re(z) = x}\} = \mathrm{x + i}\mathbb{R}$$
$$h_y := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im(z) = y}\} = \mathbb{R} + \mathrm{iy}$$
Man bestimme die Bilder der Geraden unter der Exponentialfunktion (das sind die Mengen $\exp(\mathrm{g_x})$ und $\exp(\mathrm{h_y})$) und skizziere sie. (5)

   Hilfreiche Schreibweisen:
   Seien $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung, $M, N \subseteq \mathbb{C}$ Teilmengen und $z \in \mathbb{C}$.

   - $M \cdot N = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists m \in M, n \in N : z = m \cdot n\}$
   - $M + N = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists m \in M, n \in N : z = m + n\}$
   - $z + N = \{z\} + N$

Abgabe: Dienstag, 23.11.2004, 14:00 Uhr s.t., Übungskasten im 1. Stock vor Bibliothek.

Aufgabenblätter: `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~stock`