MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Priv.-Doz. Dr. P. Schuster
Dr. E. Stockmeyer

Wintersemester
2004/05

Übungen zur Analysis II — Blatt 2

1. (a) Man beweise das Additionstheorem des Tangens:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$, für die $\tan(x)$, $\tan(y)$ und $\tan(x+y)$ definiert sind.

   (b) Man beweise die Funktionalgleichung des Arcustangens:

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan(x) + \arctan(y)| < \frac{\pi}{2}$.

2. Sei $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$.

   Man verifiziere $\int_0^{1\,*} \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)\,dx = 1$ und $\int_{0\,*}^{1} \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)\,dx = 0$.

3. (a) Es seien $G, H \subseteq \mathbb{R}$ mit $g \leqslant h$ für alle $g \in G$, $h \in H$. Man zeige, dass die Aussagen

      i. $\sup G = \inf H$

      ii. $\forall \varepsilon > 0 \exists g \in G \exists h \in H : h - g < \varepsilon$

   äquivalent sind.

   (b) Man folgere aus a) das Riemannsche Integrabilitätskriterium aus der Vorlesung (O. Forster, Analysis 1, § 18, Satz 2).

4. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Man zeige

   (a) Ist $f(t) \geqslant 0$ für alle $t \in [a,b]$ und ist $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, so ist $f = 0$.

   (b) Ist $\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0$ für alle stetigen $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $g(a) = g(b) = 0$, so ist $f = 0$.

Abgabe: keine Abgabe.

Aufgabenblätter: `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~stock`

Übungsstunden:

Dienstag	14 Uhr c.t. Hörsaal E04
Freitag	11 Uhr c.t. Hörsaal E47

Sprechstunden:

Priv.-Doz. Dr. P. Schuster	Dienstag, 15–16 Uhr	Zimmer 402	Ruf 2180-4401
Dr. E. Stockmeyer	Donnerstag, 14–15 Uhr	Zimmer 406	Ruf 2180-4406