MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Priv.-Doz. Dr. P. Schuster
Dr. E. Stockmeyer

Wintersemester
2004/05

Übungen zur Analysis II — Blatt 13

1. Für
$$H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto (x+y^2)e^{-x^2-4y^2} - e^{-4}$$
und $\varepsilon > 0$ sei $g\colon\ ]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung mit $g(0) = 1$ und $H(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \varepsilon$. Man zeige, daß g in 0 differenzierbar ist, und bestimme $g'(0)$.

2. Man bestimme den minimalen Abstand des Punktes $(1,0)$ von der Neilschen Parabel
$$N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3\}$$
sowohl mit als auch ohne Verwendung Lagrangescher Multiplikatoren.

3. Man bestimme ein Potential des Vektorfeldes
$$v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto (2xy, x^2 - y^2),$$
d.h. eine differenzierbare Funktion $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad}\varphi = v$.

4. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und seien $\alpha, \beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Man zeige, daß die Funktion
$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(y)} f(t)\,dt$$
differenzierbar ist, und berechne ihren Gradienten.

5. Man bestimme ein Potential des Vektorfeldes
$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2} \cdot (x,y)\,.$$

6. Sei $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \leqslant 0\}$. Die Argumentfunktion
$$\arg\colon U \to \mathbb{R}$$

ist wie folgt definiert: Für $(x,y) \in U$ sei $\varphi = \arg(x,y)$ die eindeutig bestimmte Zahl $\varphi \in \,]-\pi, +\pi[$ mit

$$(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi), \quad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Man zeige: Die Funktion $\arg\colon U \to \mathbb{R}$ ist ein Potential des Vektorfeldes

$$U \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2} \cdot (-y, x)\,.$$

7. Für

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \sqrt{x^2-y^2} & \text{falls } y^2 \leqslant x^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

berechne man

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^1 g(x,y)\,dx\,dy.$$

Erholsame Ferien und weiterhin viel Erfolg!

Aufgabenblätter: `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~stock`