

## Übungen zur Analysis II

## Blatt 13

1. Für

$$H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto (x + y^2)e^{-x^2 - 4y^2} - e^{-4}$$

und  $\varepsilon > 0$  sei  $g: ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Abbildung mit  $g(0) = 1$  und  $H(x, g(x)) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| < \varepsilon$ . Man zeige, daß  $g$  in 0 differenzierbar ist, und bestimme  $g'(0)$ .

2. Man bestimme den minimalen Abstand des Punktes  $(1, 0)$  von der Neilschen Parabel

$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3\}$$

sowohl mit als auch ohne Verwendung Lagrangescher Multiplikatoren.

3. Man bestimme ein Potential des Vektorfeldes

$$v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (2xy, x^2 - y^2),$$

d.h. eine differenzierbare Funktion  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\text{grad } \varphi = v$ .

4. Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und seien  $\alpha, \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktionen. Man zeige, daß die Funktion

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(y)} f(t) dt$$

differenzierbar ist, und berechne ihren Gradienten.

5. Man bestimme ein Potential des Vektorfeldes

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (x, y).$$

6. Sei  $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ . Die Argumentfunktion

$$\arg: U \rightarrow \mathbb{R}$$

ist wie folgt definiert: Für  $(x, y) \in U$  sei  $\varphi = \arg(x, y)$  die eindeutig bestimmte Zahl  $\varphi \in ]-\pi, +\pi[$  mit

$$(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Man zeige: Die Funktion  $\arg: U \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein Potential des Vektorfeldes

$$U \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (-y, x).$$

7. Für

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2} & \text{falls } y^2 \leq x^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

berechne man

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^1 g(x, y) dx dy.$$

*Erholungsreiche Ferien und weiterhin viel Erfolg!*

**Aufgabenblätter:** <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~stock>