MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Priv.-Doz. Dr. P. Schuster
Dr. E. Stockmeyer

Wintersemester
2004/05

Übungen zur Analysis II — Blatt 12

1. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ und $f \in \mathcal{C}^2(U)$.
   (a) Man zeige mit Hilfe der Taylor-Formel: Zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ mit $[a, a+x] \subset U$ gibt es ein $\vartheta_x \in]0,1[$ mit
   $$f(x+a) = f(a) + \langle \operatorname{grad} f(a), x\rangle + \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} H_f(a + \vartheta_x x)x.$$
   (b) Man zeige mit Hilfe von (a), ohne von der Restgliedabschätzung Gebrauch zu machen: Für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $[a, a+x] \subset U$ gilt
   $$f(x+a) = f(a) + \langle \operatorname{grad} f(a), x\rangle + \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} H_f(a)x + \mathrm{o}(\|x\|^2)$$
   d.h.
   $$\frac{1}{\|x\|^2}\left(f(x+a) - f(a) - \langle \operatorname{grad} f(a), x\rangle - \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} H_f(a)x\right) \to 0$$
   für $x \to 0$ mit $x \neq 0$.
2. Man bestimme und klassifiziere die lokalen Extrema der Funktion
   $$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \sin x \sin y$$
   ohne Verwendung partieller Ableitungen zweiter Ordnung.
3. (a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = (y^2 - x^2)(y^2 - 2x^2)$. Hat f bei 0 ein lokales Extremum?
   (b) Man bestimme und klassifiziere die lokalen Extrema der Funktion
   $$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^3 + 3xy(y-1).$$
4. (a) Man bestimme drei reelle Zahlen x, y, z, deren Summe gleich 90 und deren Quadratsumme minimal ist, wobei man mit den axiomatischen Eigenschaften von $\mathbb{R}$ als angeordnetem Körper auszukommen versuche.
   (b) Man bestimme drei positive reelle Zahlen a, b, c, deren Summe gleich 60 und deren Produkt maximal ist, wobei man ohne partielle Ableitungen auszukommen versuche.

Abgabe: Dienstag, 01.02.2005, 14:00 Uhr s.t., Übungskasten im 1. Stock.

Aufgabenblätter: `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~stock`