

Übungen zur Analysis II

Blatt 11

1. Es sei $F: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Man zeige, daß die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) Für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\text{grad } F(x) = \lambda \cdot x$.
(ii) Es gibt ein stetig differenzierbares $\varphi: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x) = \varphi(\|x\|_2)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

2. Gegeben sei die Abbildung

$$P: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \\ (r, \varphi, \psi, \vartheta) \mapsto (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta \cos \psi, r \cos \vartheta \sin \psi).$$

Man berechne die Jacobi-Matrix von P und deren Determinante.

3. Für $n \geq 2$ sei A eine reelle $(n \times n)$ -Matrix, die positiv definit und symmetrisch ist, sowie $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$. Man betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c$$

und setze $v = \text{grad } f(y)$ für ein festes $y \in \mathbb{R}^n$.

- (a) Man gebe die Taylor-Entwicklung von f um y an.
(b) Man leite im Fall $v \neq 0$ eine Bestimmungsgleichung für $t \in \mathbb{R}$ mit

$$f(y + tv) = \min\{f(y + sv) : s \in \mathbb{R}\}$$

her und zeige $\langle \text{grad } f(z), z - y \rangle = 0$ für $z = y + tv$.

4. (a) Man bestimme die Taylor-Entwicklung der Funktion

$$f: B_1((1, 1)) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{x - y}{x + y}$$

um den Punkt $(1, 1)$ bis einschließlich der Ordnung 2.

(b) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Der *Laplace-Operator* $\Delta : \mathcal{C}^2(U) \rightarrow \mathcal{C}(U)$ ist definiert durch

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Man zeige

$$\Delta(fg) = f \Delta g + g \Delta f + 2 \langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle$$

für alle $f, g \in \mathcal{C}^2(U)$.

Abgabe: Dienstag, 25.01.2005, 14:00 Uhr s.t., Übungskasten im 1. Stock.

Aufgabenblätter: <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~stock>