MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Priv.-Doz. Dr. P. Schuster
Dr. E. Stockmeyer

Wintersemester
2004/05

Übungen zur Analysis II **Blatt 10**

1. Man zeige

   (a) Ist $I \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend, so ist I ein Intervall, d.h., aus $x \leqslant z \leqslant y$ und $x, y \in I$ folgt $z \in I$.

   (b) Ist X (metrischer Raum) zusammenhängend, und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(x) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

   (c) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist (weg)zusammenhängend.

2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $0 \in U$ und sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung.

   (a) Sei f die Einschränkung einer linearen Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Man zeige, dass f differenzierbar ist, und bestimme Df.

   (b) Es gelte $\|f(x)\| \leqslant \|x\|^2$ für alle $x \in U$. Man zeige, dass f in 0 differenzierbar ist, und bestimme $Df(0)$.

   (c) Sei $n = 2, m = 1$, und sei $f|\{(x, y) : xy = 0\} = 0$ und $f|\{(x, y) : x = y\} = y$. Man zeige, dass f in 0 nicht differenzierbar ist.

3. (a) Man betrachte die Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad x = (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ \|x\|_2 \cdot \sin \dfrac{x_2}{\|x\|_2} & \text{sonst} \end{cases}$$

   und zeige: g ist stetig, auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ differenzierbar und bei 0 in allen Richtungen differenzierbar, aber nicht differenzierbar in 0.

   (b) Es sei $n \geqslant 2$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $a \in U$. Ist $\operatorname{grad} f(a) \neq 0$, so nimmt die Funktion

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\} \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto D_v f(a)$$

   in $\dfrac{\operatorname{grad} f(a)}{\|\operatorname{grad} f(a)\|_2}$ ihr Maximum an, mit anderen Worten: Der Gradient gibt die Richtung des stärksten Anstiegs an.

   Hinweis: Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

4. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und nicht leer, sowie $h\colon U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion.

   (a) Man zeige: Ist $\gamma : [0,1] \to U$ eine stetig differenzierbare Kurve, so gilt

   $$\int_0^1 \langle\, \mathrm{grad}\, h(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = h(\gamma(1)) - h(\gamma(0)).$$

   (b) Es sei U derart, daß es zu allen $a, b \in U$ eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [0,1] \to U$ gibt mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$. Man zeige: h ist genau dann konstant, wenn $\mathrm{grad}\, h$ überall verschwindet.

Abgabe: Dienstag, 18.01.2005, 14:00 Uhr s.t., Übungskasten im 1. Stock.

Aufgabenblätter: `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~stock`