Aufgabe 9/5. Ein metrischer Raum X *hat die endliche Durchschnittseigenschaft*, wenn für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener Teilmengen von X gilt

$$\forall N \in \mathbb{N} \left(\bigcap_{n\leq N} A_n \neq \emptyset \right) \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset\,.$$

Man zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) X ist folgenkompakt.
(ii) X hat die endliche Durchschnittseigenschaft.
(iii) Jede offene Überdeckung $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von X hat eine endliche Teilüberdeckung.

Beweis:

Ist X folgenkompakt $\Rightarrow$ X hat die endliche Durchschnittseigenschaft

Sei A_n eine Folge abgeschlossener Teilmengen von X, mit $A_{n+1} \subset A_n$ (o.B.d.A) so dass

$$\bigcap_{i=1}^{N} A_i = A_N \neq \emptyset, \quad \text{für} \quad N \in \mathbb{N}$$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $x_n \in A_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
X folgenkompakt $\Rightarrow \exists\,(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von (x_n) mit

$$x_{n_k} \to x \in X, \quad k \to \infty.$$

Da (i) A_N abgeschlossen ist, d.h., jede KONVERGENTE Teilfolge von A_N innerhalb A_N konvergiert,und (ii) für alle $N \in \mathbb{N}$ die Folgen von $(x_{n_k})_{n_k>N} \subset A_N$ gegen x konvergieren, gilt

$$x \in A_n,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Also

$$x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset$$

X hat die endliche Durchschnittseigenschaft $\Rightarrow$ X ist Folgen-Kompakt.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, und nehmen wir die Teilmenge

$$A_n = \overline{\{x_k : k \geq n\}} = \{x_k : k \geq n\} \cup \partial\{x_k : k \geq n\}$$
$$= \mathring{A}_n \cup \partial A_n.$$

Sei nun $y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset$. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$x_n \notin A_{n+1}$$

so folgt: $y \neq x_n\, \forall n \in \mathbb{N}$, also

$$y \in \partial A_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$, wegen der Definition des Randes, gilt: $\forall \varepsilon > 0$ es existiert ein Element von $\mathring{A}_n$, nämlich x_N, mit $N > n$, so dass

$$x_N \in B_\varepsilon(y).$$

Da $\mathring{A}_n \subset \mathring{A}_0 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, gibt es unendliche viele Elemente der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ innerhalb einer beliebig kleinen ε-Umgebung von y. Also ist y ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Deshalb besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge, die gegen y konvergiert.

Schliesslich: (iii)$\Leftrightarrow$: X-kompakt $\Leftrightarrow$ X-folgenkompakt (nach der Vorlesung).