

Aufgabe 9/5. Ein metrischer Raum X hat die endliche Durchschnittseigenschaft, wenn für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ abgeschlossener Teilmengen von X gilt

$$\forall N \in \mathbb{N} \left(\bigcap_{n \leq N} A_n \neq \emptyset \right) \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset.$$

Man zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) X ist folgenkompakt.
- (ii) X hat die endliche Durchschnittseigenschaft.
- (iii) Jede offene Überdeckung $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von X hat eine endliche Teilüberdeckung.

Beweis:

Ist X folgenkompakt $\Rightarrow X$ hat die endliche Durchschnittseigenschaft

Sei A_n eine Folge abgeschlossener Teilmengen von X , mit $A_{n+1} \subset A_n$ (o.B.d.A) so dass

$$\bigcap_{i=1}^N A_i = A_N \neq \emptyset, \quad \text{für } N \in \mathbb{N}$$

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $x_n \in A_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

X folgenkompakt $\Rightarrow \exists (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von (x_n) mit

$$x_{n_k} \rightarrow x \in X, \quad k \rightarrow \infty.$$

Da (i) A_N abgeschlossen ist, d.h., jede KONVERGENTE Teilfolge von A_N innerhalb A_N konvergiert, und (ii) für alle $N \in \mathbb{N}$ die Folgen von $(x_{n_k})_{n_k > N} \subset A_N$ gegen x konvergieren, gilt

$$x \in A_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Also

$$x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset$$

X hat die endliche Durchschnittseigenschaft $\Rightarrow X$ ist Folgen-Kompakt.

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X , und nehmen wir die Teilmenge

$$\begin{aligned} A_n &= \overline{\{x_k : k \geq n\}} = \{x_k : k \geq n\} \cup \partial\{x_k : k \geq n\} \\ &= \overset{\circ}{A}_n \cup \partial A_n. \end{aligned}$$

Sei nun $y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset$. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$x_n \notin A_{n+1}$$

so folgt: $y \neq x_n \forall n \in \mathbb{N}$, also

$$y \in \partial A_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$, wegen der Definition des Randes, gilt: $\forall \varepsilon > 0$ es existiert ein Element von $\overset{\circ}{A}_n$, nämlich x_N , mit $N > n$, so dass

$$x_N \in B_\varepsilon(y).$$

Da $\overset{\circ}{A}_n \subset \overset{\circ}{A}_0 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, gibt es unendliche viele Elemente der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ innerhalb einer beliebig kleinen ε -Umgebung von y . Also ist y ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Deshalb besitzt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge, die gegen y konvergiert.

Schliesslich: (iii) \Leftrightarrow X -kompakt $\Leftrightarrow X$ -folgenkompakt (nach der Vorlesung).