Übungen zur Analysis II, Übungsblatt 5

F. Merkl, J. Berger,Y. Bregman, G. Svindland

Aufgabe 1: Man berechne den Gradienten und die Hessematrix von f für die Fälle:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$,

b) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x/y$,

c) $f :]0, \infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^y$.

Aufgabe 2: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy|y|}{(x^2+y^2)^{1/2}}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Man zeige, daß $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

Aufgabe 3: Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t, x_1, \ldots, x_n) = t^{-n/2} \exp\left(-\frac{\|x\|_2^2}{2t}\right)$$

Zeigen Sie, daß f eine Lösung der sogenannten Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{1}{2}\Delta f = \frac{\partial f}{\partial t}$$

ist (wobei sich das Δ nur auf die x-Komponenten bezieht).

Aufgabe 4: Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,,\ f(x) = \|x\|_2^2$, und sei $x_0 \in S^2$. Man betrachte die Menge E aller Vektoren $v \in \mathbb{R}^3$, so daß die Richtungsableitung

$$\left[\frac{d}{dt} f(x_0 + tv)\right]_{t=0}$$

verschwindet. Zeigen Sie, daß E eine Ebene ist und daß $\nabla f(x_0)$ senkrecht auf E steht.

($*$) **Aufgabe 5:** Zeigen Sie: Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ erzeugen dieselbe Topologie.