Übungen zur Analysis II, Übungsblatt 4

F. Merkl, J. Berger,Y. Bregman, G. Svindland

Aufgabe 1:

a) Wir definieren die Hilbert-Schmidt Norm $\| \, . \, \|_{\mathrm{HS}}$ auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ durch:

$$\| \, (a_{ij})_{ij} \, \|_{\mathrm{HS}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} .$$

Zeigen Sie, daß für $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt:

$$\| \, AB \, \|_{\mathrm{HS}} \leq \| \, A \, \|_{\mathrm{HS}} \| \, B \, \|_{\mathrm{HS}} .$$

b) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ für alle $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ konvergiert.

Aufgabe 2: Sei $\mathcal{C}^1[0,1]$ der Raum aller einmal stetig differenzierbarer Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$, und sei

$$\| \, . \, \| : \mathcal{C}^1[0,1] \to \mathbb{R} , \quad \| \, f \, \| = \| \, f \, \|_\infty + \| \, f' \, \|_\infty .$$

Man zeige $(\mathcal{C}^1[0,1], \| \, . \, \|)$ ist ein Banachraum.

Aufgabe 3: Sei $d(x,y) := 2/\pi \cdot |\arctan(x) - \arctan(y)|$ die Arcustangensmetrik auf $\mathbb{R}$. Man zeige:

a) d induziert die Standardtopologie.

b) $(\mathbb{R}, d)$ ist nicht vollständig.

Aufgabe 4: Sei (A, d_A) ein metrischer Raum und (B, d_B) ein vollständiger metrischer Raum. Außerdem sei $C \subseteq A$ eine dichte Teilmenge und $f : C \to B$ eine gleichmäßig stetige Abbildung (bezüglich der von d_A auf C induzierten Metrik). Zeigen Sie, daß es eine gleichmäßig stetige Fortsetzung von f auf A gibt.

Aufgabe 5: Lösen Sie das Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} x_1' &= \mathrm{x}_1 + x_2 \qquad & x_1(0) &= 1 \\ x_2' &= 3\mathrm{x}_2 \qquad & x_2(0) &= 2 \end{aligned}$$