Übungen zur Analysis II, Übungsblatt 3

F. Merkl, J. Berger,Y. Bregman, G. Svindland

Aufgabe 1: Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum mit topologischem Teilraum $(N, \mathcal{S})$. Zeigen Sie: Wird die Topologie $\mathcal{T}$ von einer Semimetrik d induziert, so wird die Teilraumtopologie $\mathcal{S}$ von der Einschränkung von d auf $N \times N$ induziert.

Aufgabe 2: Seien $(V, \| \, . \, \|_V)$ und $(W, \| \, . \, \|_W)$ normierte Räume und $L : V \to W$ linear. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

a) L ist stetig.

b) L ist stetig in 0.

c) Es gibt eine positive Konstante K so, daß für alle $x \in V$ gilt:

$$\|L(x)\|_W \leq K \|x\|_V \, .$$

Aufgabe 3: Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, daß $d : M \times M \to \mathbb{R}$ bezüglich der Produktmetrik stetig ist.

Aufgabe 4: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2} \right| < 1 \, .$$

Zeigen Sie: Die Gleichung $f(x) = 0$ besitzt eine eindeutige Lösung $x^* \in \mathbb{R}$, und das Newtonverfahren liefert für beliebige Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$ eine gegen x^* konvergente Folge.

Aufgabe 5: Sei $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ stetig mit

$$K := \sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 |f(x,y)| \, dy < 1 \, .$$

Zeigen Sie: Für jedes $g \in \mathcal{C}[0,1]$ besitzt die Integralgleichung

$$h(x) + \int_0^1 f(x,y) h(y) \, dy = g(x) \, , \quad x \in [0,1]$$

genau eine Lösung $h \in \mathcal{C}[0,1]$, und es gilt

$$\|h\|_\infty \leq \frac{\|g\|_\infty}{1-K} \, .$$