Übungen zur Analysis II, Übungsblatt 2

F. Merkl, J.Berger,Y. Bregman, G.Svindland

Aufgabe 1: Seien (A, d_A) und (B, d_B) zwei metrische Räume. Zeigen Sie:

$$d : A \times B \to \mathbb{R}\,,\ \ d((a,b),(a',b')) = \max\{d_A(a,a'), d_B(b,b')\}$$

ist eine Metrik auf $A \times B$. d heißt die Produktmetrik, $(A \times B, d)$ das Produkt der metrischen Räume (A, d_A) und (B, d_B).

Aufgabe 2: Es sei V ein reeller Vektorraum und $||.||$ eine Seminorm auf V. Zeigen Sie, daß

$$[0] := \{x \in V \mid ||x|| = 0\}$$

ein Unterraum von V ist und daß der Quotientenraum $V/[0]$ mit dem in der Vorlesung definierten Raum $V/\sim$ übereinstimmt.(Zur Erinnerung: $V/\sim$ entsteht durch Zusammenkleben von Punkten mit Abstand 0.)

Aufgabe 3: Zeigen Sie die Höldersche Ungleichung

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\,dx \right| \leq ||f||_p \cdot ||g||_q$$

und die Dreiecksungleichung

$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

für $f, g \in \mathcal{C}[a,b]$, $p, q > 1$ mit $1/p + 1/q = 1$.

Aufgabe 4: Es seien $||.||_A$ und $||.||_B$ zwei Normen auf dem gleichen reellen Vektorraum V. $\mathcal{T}_A$ bzw. $\mathcal{T}_B$ bezeichnen die zugehörigen induzierten Topologien. Zeigen Sie: Falls $\mathcal{T}_B \subseteq \mathcal{T}_A$, so gilt

$$\exists\, C > 0\, \forall\, x\ :\ ||x||_B \leq C \cdot ||x||_A\,.$$

$(*)$ **Aufgabe 5:** Seien $(A, \mathcal{T}_A)$ und $(B, \mathcal{T}_B)$ zwei topologische Räume. Wir definieren

$$\mathcal{T} := \left\{ \bigcup_{(U,V)\in\mathcal{P}} U \times V \;\middle|\; \mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}_A \times \mathcal{T}_B \right\}.$$

Zeigen Sie, daß $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $A \times B$ ist. $(A \times B, \mathcal{T})$ wird Produktraum genannt, $\mathcal{T}$ die Produkttopologie.