Übungen zur Analysis II, Übungsblatt 10

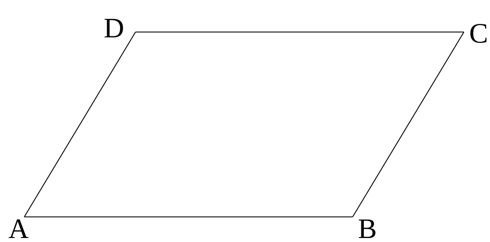
F. Merkl, J.Berger,Y. Bregman, G.Svindland

Aufgabe 1: Zeigen Sie: $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n | \ ||x||_2 = 1\}$ ist eine $n-1$-dimensionale Submannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Berechnen Sie $T_x S^{n-1}$ für $x \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Aufgabe 2: Zeigen Sie: $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ y^3 = x^2\}$ ist keine Submannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$, aber $M \setminus \{0,0\}$ ist jedoch eine Submannigfaltigkeit. Skizzieren Sie M qualitativ.

Aufgabe 3:
Das Möbiusband. Zeigen Sie: $M := \{(\cos 2t, \sin 2t, s\cos t, s\sin t) | \ s,t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$ ist eine Submannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$. Versuchen Sie, sich M anschaulich vorzustellen, indem Sie mit Schere und Klebstoff ein Papiermodell basteln.

$(*)$ **Aufgabe 4:** Betrachten Sie folgende Konfiguration aus starren Stäbchen:



In den Gelenken A, B, C, D ist die Figur frei drehbar. Welche Dimension hat der Raum M der erlaubten Konfigurationen (A, B, C, D), wenn die Figur frei

a) in der Ebene

b) im Raum

beweglich ist? Nun seien alle Stäbe gleich lang (Länge 1). Berechnen Sie eine Basis des Tangentialraums an den Konfigurationraum $M \subseteq (\mathbb{R}^2)^4$ in der Konfiguration $(A_0, B_0, C_0, D_0) = ((0,0),(1,0),(1,1),(0,1))$. Geometrische Interpretation?