Übungen zur Analysis II, Übungsblatt 14

F. Merkl, J. Berger, Y. Bregman, G. Svindland

Aufgabe 1. Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und sei $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty[$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

- für $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$;
- für absteigende Folgen (B_n) in $\mathcal{A}$ mit $\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0.$$

Zeigen Sie, dass μ ein Maß ist.

Aufgabe 2. Sie haben einen Quadratmeter Pappe zur Verfügung. Sie sollen daraus eine quaderförmige Schachtel bauen, ohne Deckel. Wie wählen Sie Länge, Breite und Höhe der Schachtel, damit der Inhalt maximal wird?

Aufgabe 3. Für $a \in \mathbb{R}$ bezeichne S_a das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^3 + y^2 a + x^4 y + y &= 0 \\ xya^2 + y^5 + xa + ya^2 &= 0 \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Es gibt $\varepsilon > 0$ und Funktionen $f, g \in C^\infty(]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[)$, so dass für jedes $a \in]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$ das Paar $(g(a), f(a))$ eine Lösung des Gleichungssystems S_a ist.

Aufgabe 4. Es seien $g_1, g_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit

$$\|D_i g_j\|_\infty \leq \frac{1}{10}$$

für alle $i, j \in \{1, 2\}$. Zeigen Sie: Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = (x + g_1(x, y), y + g_2(x, y))$$

ist ein glatter Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R}^2$. Vergessen Sie dabei nicht zu zeigen, daß f bijektiv ist.

Aufgabe 5. Gegeben seien die offene Menge $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, die Differentialform

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2}\,dy - \frac{y}{x^2+y^2}\,dx \in \mathcal{C}^\infty(U,(\mathbb{R}^2)^*)$$

und eine Abbildung $f \in \mathcal{C}^\infty(U,U)$, so daß für alle $x \in U$ die Verbindungsstrecke $[x, f(x)]$ von x nach $f(x)$ ganz in U verläuft. Beweisen Sie: Die 1-Form $f^*\omega \in \mathcal{C}^\infty(U,(\mathbb{R}^2)^*)$ ist *nicht* exakt. Sie dürfen dabei ohne Beweis verwenden, daß ω geschlossen, aber nicht exakt ist.

Aufgabe 6. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \big((x+y)^2 - 1\big)^2 + (x-y)^3 - 3(x-y).$$

a) Bestimmen Sie die stationären Punkte von f und klären Sie, um welche Art von stationären Punkt es sich jeweils handelt.

b) Berechen Sie die Taylorentwicklung von f um die stationären Punkte bis zur zweiten Ordnung.