Übungsblatt 13

Aufgabe 1 Unter Verwendung von $\mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu(Y) - \mu(X \cap Y)$ erhalten wir:

$$\underline{\mu(A \cup B \cup C)} = \mu(A \cup (B \cup C)) = \mu(A) + \mu(B \cup C) - \mu(A \cap (B \cup C))$$

$$= \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(B \cap C) - \mu((A \cap B) \cup (A \cap C))$$

$$= \underline{\mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(B \cap C) - \mu(A \cap B) - \mu(A \cap C) + \mu(A \cap B \cap C)}$$

Aufgabe 2 Dies ist ein Spezialfall von Aufgabe 2 des Hausaufgabenblattes 13. Siehe entsprechenden Lösungsvorschlag.

Aufgabe 3

$\mathcal{D} := \{ B \in \mathcal{A} \,/\, \mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B) \}$ ist Dynkin-System!

$\emptyset \in \mathcal{D}$ ✓ $\quad \underline{B \in \mathcal{D}} \Rightarrow \mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B) \Rightarrow$

$$\mu(A \cap B^c) = \mu(A) - \mu(A \cap B) = \mu(A) - \mu(A)\mu(B) = \mu(A)(1 - \mu(B))$$
$$= \mu(A)\,\mu(B^c)$$

$\Rightarrow \underline{B^c \in \mathcal{D}}$

$\underline{B_n \in \mathcal{D}}$ p.d. $\Rightarrow \mu(A \cap (\dot\bigcup B_n)) = \mu(\dot\bigcup (A \cap B_n)) =$

$$\sum_n \mu(A \cap B_n) = \sum_n \mu(A)\mu(B_n) = \mu(A)\mu(\dot\bigcup B_n)$$

$\Rightarrow \underline{\bigcup B_n \in \mathcal{D}}$

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{D} \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}, \Omega) \in \mathcal{D}$$

$\cap$-stabil

D

Aufgabe 4

$[0,1[\cup]2,3]$ ist Borelmenge, als Vereinigung von

$$[0,1[= \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \underbrace{]0-1/m, 1[}_{\text{offen, also Borelsch}} \quad \text{und} \quad \underbrace{]2,3]}_{\text{Borelsch nach Vorlesung}}.$$

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$$

$q \in \mathbb{Q}$ ← abzählbar

abzählbar, also Borelsch.

$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ klar

ganzzahliger Anteil

$$A_m := \{ x \in [0,1[\; / \; x \cdot 10^m - [x \cdot 10^m] \in [7,4[\}$$

betrachte $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m$ und

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq k} A_m \quad \square$$