

## Übungen zur Analysis II, Übungsblatt 13

F. Merkl, J. Berger, Y. Bregman, G. Svindland

**Aufgabe 1.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum mit  $\mu(\Omega) < +\infty$ . Seien weiter  $A, B, C \in \mathcal{A}$ . Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B \cup C) = \\ \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cap B) - \mu(A \cap C) - \mu(B \cap C) + \mu(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

**Aufgabe 2.** Gegeben sei ein rechteckiges Blatt Papier, welches man mit einer Schere in kleine Rechtecke zerschneidet. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des ursprünglichen Blatt Papiers gleich der Summe der Flächeninhalte der durch das Zerschneiden entstandenen kleinen Rechtecke ist.

**Aufgabe 3.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei  $A \in \mathcal{A}$  und sei  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$  ein  $\cap$ -stabiles Mengensystem. Weiter gelte

$$\forall B \in \mathcal{F} : \mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Zeigen Sie:

$$\forall B \in \sigma(\mathcal{F}, \Omega) : \mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

**Aufgabe 4.** Zeigen Sie, dass folgende Mengen Borelmengen sind:

$$[0, 1[ \cup ]2, 3], \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

$\{x \in [0, 1[ \mid \text{in der Dezimaldarstellung von } x \text{ kommt die Ziffer 3 vor}\}$ ,

$\{x \in [0, 1[ \mid \text{in der Dezimaldarst. von } x \text{ kommt die Ziffer 3 unendlich oft vor}\}$ .