Aufgabe 1 a $\underline{zz}$: $Z^1(U_1) \subseteq B^1(U_1)$, dies gilt aber wegen der Zusammenziehbarkeit von U_1. Denn

$$\Phi\ [0,1] \times U_1 \to U_1 \quad \text{ist glatte Homotopie}$$
$$(t,x) \mapsto tx - (1-t)(-1,0)$$

mit $\Phi_0(x) = -(0,1)$ und $\Phi_1(x) = x$. Man beachte, dass $\Phi(t,x) \in U_1$ für alle $x \in U_1$.

b) $\underline{zz}$: $f_1 - f_2 \restriction \mathbb{R} \times]0,\infty[$ konstant. Auf dieser Menge ist jedoch $df_1 = df_2 = \omega$, also $d\, f_1 - f_2 = 0$, also $f_1 - f_2$ konstant.

Aufgabe 2 a $\underline{(\Psi \circ \Phi)^* \omega}(x)$

Matrizenprodukt

$$\overset{\vee}{=} \omega \circ \Psi \circ \Phi(x) \times D(\Psi \circ \Phi)(x)$$
$$\overset{\vee}{=} \omega \circ \Psi \circ \Phi(x) \times D\Psi(\Phi(x)) \times D\Phi(x)$$
$$\overset{\vee}{=} \tilde{\omega}\, \Phi(x) \times D\Phi(x)$$
$$\overset{\vee}{=} \Phi^* \tilde{\omega}(x)$$
$$\overset{\vee}{=} \underline{\underline{\Phi^* \Psi^* \omega(x)}}$$

bei $\tilde{\omega} = \Psi^* \omega$, $x \in U$

b) $\int_{\Psi \circ \Phi} \omega = \int_a^b (\Psi \circ \Phi)^* \omega = \int_a^b \Phi^* \Psi^* \omega = \int_\Phi \Psi^* \omega$ □

Aufgabe 3

Parametrisierung durch

$$\varphi(t) = (a\cos t,\ b\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\omega(x,y) = \left(-\tfrac{1}{2}y,\ \tfrac{1}{2}x\right)$$

$$\omega \circ \varphi = \left(-\tfrac{b}{2}\sin t,\ \tfrac{a}{2}\cos t\right) \qquad D\varphi = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ +b\cos t \end{pmatrix}$$

$$\varphi^*\omega = \omega(\varphi(t)) \times D\varphi(t) = +\frac{ab}{2}\sin^2 t + \frac{ab}{2}\cos^2 t = +\frac{ab}{2}$$

$$\Rightarrow \int_\varphi \omega = \int_0^{2\pi} +\frac{ab}{2}\,dt = \underline{\underline{\pi ab}}$$

Aufgabe 4

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_t} [0,1]\times\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\omega} \mathbb{R}^2$$

$$x \longmapsto (t,x) \longmapsto tx \longmapsto (\omega_1(tx), \omega_2(tx))$$

$$\psi \circ f_1 = id_{\mathbb{R}^2} \quad \Rightarrow \quad \omega = f_1^*\psi^*\omega \quad \text{und}$$

$$\psi \circ f_0 = \sigma \quad \Rightarrow \quad \sigma = f_0^*\psi^*\omega$$

Nach Beweis des Lemmas (unmittelbar von Poincaré) gilt

$$\omega = f_1^*\psi^*\omega - f_0^*\psi^*\omega = dg \quad \text{mit}$$

$$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \mapsto \int_0^1 \tilde{\omega}(t,x)\,dt, \quad \text{wobei}$$

$\tilde{\omega}$ die erste Komponente von $\psi^*\omega$ ist.

mit $\quad w\,\psi(t,x,y) = \left(w_1(tx,ty),\, w_2(tx,ty)\right)$ und

$$D\psi(t,x,y) = \begin{pmatrix} x & t & 0 \\ y & 0 & t \end{pmatrix}$$ erhalten wir

$$\tilde{\omega} = x\, w_1(tx,ty) + y\, w_2(tx,ty),$$ somit

$$g(x,y) = \int_0^1 x\, w_1(tx,ty) + y\, w_2(tx,ty)\, dt .$$

"Probe": $\quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\, \tilde{\omega}(t,x,y)\, dt$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\, t\, w_1(tx,ty)\, dt$$

$$= w_1(x,y) .$$

<u>Aufgabe 5</u> $\quad \sigma\{\{1\},\{1,2\}\} = \left\{ \emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{0,3\}, \{0,2,3\}, \{0,1,3\} \right\}$