Übungen zur Analysis II, Übungsblatt 12

F. Merkl, J. Berger, Y. Bregman, G. Svindland

Aufgabe 1.

a) Gegeben seien die offene Überdeckung

$$U_1 = \mathbb{R}^2 \setminus ([0,\infty[\times\{0\}),\ U_2 = \mathbb{R}^2 \setminus (]-\infty,0] \times \{0\}).$$

von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Zeigen Sie $H^1(U_1) = \{0\}$ und $H^1(U_2) = \{0\}$.

b) Gegeben sei $\omega \in Z^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. Seien ω_1 bzw. ω_2 die Einschränkungen von ω auf U_1 bzw. U_2. Seien (nach Aufgabe 1a) $f_1 \in C^\infty(U_1)$ und $f_2 \in C^\infty(U_2)$ mit $df_1 = \omega_1$ und $df_2 = \omega_2$. Zeigen Sie, dass $f_1 - f_2$ (definiert auf $U_1 \cap U_2$) sowohl auf $\mathbb{R}\times]-\infty,0[$ als auch auf $\mathbb{R}\times]0,\infty[$ konstant ist.

Aufgabe 2. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ und $W \subseteq \mathbb{R}^l$ offen. Weiter seien $\Phi \in C^\infty(U,V)$, $\Psi \in C^\infty(V,W)$ und $\omega \in C^\infty(W,\mathbb{R}^l)$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass $(\Psi \circ \Phi)^*\omega = \Phi^*(\Psi^*\omega)$.

b) Sei nun $U = [a,b]$. Folgern Sie aus a), dass $\int_{\Psi\circ\Phi} \omega = \int_\Phi \Psi^*\omega$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie das Wegintegral $I = \int \frac{x}{2}dy - \frac{y}{2}dx$ über die positiv orientierte Ellipse

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\} \quad (a,b>0)\,.$$

(Aus der Analysis I wissen Sie, dass I die Fläche der Ellipse ist.)

Aufgabe 4. Betrachten Sie die Homotopie

$$\Psi : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (t,x) \mapsto tx$$

von der Nullabbildung zur Identität. Gegeben sei

$$\omega = \omega_1 dx + \omega_2 dy \in Z^1(\mathbb{R}^2)\,.$$

Aus dem Lemma von Poincaré wissen Sie, dass $\omega = df$ für ein $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Vollziehen Sie den Beweis des Lemmas von Poincaré mit der Homotopie Ψ an diesem Beispiel nach, um f explizit durch ein Integral über ω auszudrücken.

Aufgabe 5. Sei $\Omega = \{0,1,2,3\}$. Geben Sie explizit alle Elemente der von $\{1\},\{1,2\}$ erzeugten σ-Algebra an.