Übungsblatt 11 Josef Berger ①

Aufgabe 1: Gesucht ist $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$df = (3x^2-y,\ 2y-x)$. Somit

$f = x^3 - xy + \alpha$ für $\underset{\text{ein}}{\vee}$ $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad f = y^2 - xy + \beta$ für $\underset{\text{ein}}{\vee}$ $\beta \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f = x^3 + y^2 - xy \quad \overset{\text{Test}}{\Rightarrow} \omega$ exakt $\Rightarrow \omega$ geschlossen.

Ü Aufgabe 2: $\tilde{\omega} = \underbrace{(3x^2+y)}_{=\omega_1} dx + \underbrace{(2y-x)}_{=\omega_2} dy$

$\frac{d\omega_1}{dy} = 1 \quad , \quad \frac{d\omega_2}{dx} = -1 \quad \Rightarrow \tilde{\omega}$ nicht geschlossen

$\Rightarrow \tilde{\omega}$ nicht exakt.

Übungsaufgabe 3

$\Phi(u,v) = (u-v, uv)$

$\omega(x,y) = (3x^2 - y, 2y - x)$

$f(x,y) = x^3 + y^2 - xy \quad , \quad \omega = df$

gesucht: $\Phi^* \omega$ <u>1. Lösungsweg:</u>

$$\Phi^* \omega = \Phi^* df \overset{\text{Lemma}}{\overset{!}{=}} d\, f \circ \Phi$$

$$f \circ \Phi(u,v) = f(\underbrace{u-v}_{x}, \underbrace{uv}_{y}) = x^3 + y^2 - xy$$

$$= u^3 - 4u^2v - v^3 + 4uv^2 + u^2v^2$$

Ableitung nach u $\quad 3u^2 - 8uv + 4v^2 + 2uv^2$

Ableitung nach v $\quad -4u^2 - 3v^2 + 8uv + 2u^2v$

$$\Phi^* \omega = (3u^2 - 8uv + 4v^2 + 2uv^2, -4u^2 - 3v^2 + 8uv + 2u^2v)$$

2. Lösungsweg:

"nach Definition"

$$w \circ \Phi(u,v) = w(\underbrace{u-v}_{x}, \underbrace{uv}_{y}) = (3x^2-y, 2y-x)$$

$$= (3u^2+3v^2-7uv, \; 2uv-u+v)$$

$$D\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ v & u \end{pmatrix}$$

$\Phi^*(\omega)(u,v) =$

$$w(\Phi(u,v)) \circ D\Phi(u,v) = (3u^2+4v^2+2uv^2-8uv,$$

$$-4u^2-3v^2+8uv+2u^2v)$$

$\tilde{\omega}$ "nach Definition"

$$\tilde{\omega} \circ \Phi(x,y) = \tilde{\omega}(\underbrace{u-v}_{x}, \underbrace{uv}_{y}) = (3x^2+y,\ 2y-x)$$

$$= (3u^2+3v^2-5uv,\ 2uv-u+v)$$

$$\tilde{\omega}\ \Phi(u,v) \circ D\Phi(u,v) =$$

$$(\underbrace{3u^2+4v^2+2uv^2-6uv}_{f_1},\ \underbrace{-4u^2-3v^2+6uv}_{f_2}+2u^2v)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial v} = 8v + 4uv - 6u$$

$\Rightarrow$ $\Phi^* \tilde{\omega}$ nicht geschlossen

$$\frac{\partial f_2}{\partial u} = -8u + 6v + 4uv$$

$\Rightarrow$ nicht exakt

l-Aufgabe 4 a)

Es genügt, folgende Teilmenge von P zu betrachten:

$$\tilde{P} = \{ (x,y) \in P \mid y \leq 8 \}$$

Diese ist kompakt, somit nimmt die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^2 + (y+4)^2$$

(Quadrat des Abstandes von $(0,-4)$)

auf P ihr Minimum an.

b) Gesucht sind Kandidaten für Extremstellen von f unter der Nebenbedingung

$$h(x,y) = 0, \quad \text{bei } h(x,y) = x^2 + y$$

für solche muss gelten: $\exists \mu \quad \nabla f = \mu \nabla h$,

also

$$\begin{aligned} 2x &= \mu\, 2x \\ 2y+8 &= \mu\, 1 \end{aligned}$$

$\mu = 0 \Rightarrow$ W!, also $\mu \neq 0 \Rightarrow y = -3{,}5 \vee x = 0$

$\Rightarrow$ Kandidaten $\{ (0,0), (-\sqrt{3{,}5}, -3{,}5), (\sqrt{3{,}5}, -3{,}5) \}$

Abstand zu $(0,-4)$: $4 \quad \underbrace{\sqrt{3{,}75} \quad \sqrt{3{,}75}}_{\text{Minimalstellen}}$

Aufgabe 5

z.z.: $\forall x \ (\|x\|_2 = 1 \implies r_1 \leq \|x\|_0 \leq r_2)$

Denn dann gilt für $x \neq 0$: $\quad r_1 \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_0 \leq r_2$ und

somit $\quad r_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_0 \leq r_2 \|x\|_2$.

a) Da $\|\cdot\|_0$ stetig ist (bzgl der $\|\cdot\|_2$-Norm) und da S^2 kompakt ist (bzgl der $\|\cdot\|_2$-Norm), nimmt $\|\cdot\|_0$ auf S^2 Minimum und Maximum an, somit existieren r_1 und r_2.

b) Um besser rechnen zu können, gehen wir zu $\|\cdot\|_0^2$ über.

Setze $\quad f(a,b,c) = a^2 + 2b^2 + 3c^2$ und

$\quad h(a,b,c) = a^2 + b^2 + c^2$.

Wir suchen Extrema von f mit Nebenbed $h = 1$.
Für solche muss also gelten

$$\nabla h = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix} \neq 0, \quad \exists \mu \quad \nabla f = \begin{pmatrix} 2a \\ 4b \\ 6c \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix} = \nabla h.$$

Somit $(a,b,c) \in \left\{ \begin{matrix} (-1,0,0), (0,-1,0), (0,0,-1) \\ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \end{matrix} \right\}$, Auswertung ergibt:

f hat 1 und 3 als Extremwerte, $\|\cdot\|_0$ hat also 1 und $\sqrt{3}$.