Übungen zur Analysis II, Übungsblatt 11

F. Merkl, J. Berger, Y. Bregman, G. Svindland

Aufgabe 1. Gegeben sei die Differentialform $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^2, (\mathbb{R}^2)^*)$ durch

$$\omega = (3x^2 - y)dx + (2y - x)dy$$

Untersuchen Sie ω hinsichtlich Geschlossenheit und Exaktheit. Begründen Sie Ihr Resultat!

Aufgabe 2. Gegeben sei die Differentialform $\widetilde{\omega} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, (\mathbb{R}^2)^*)$ durch

$$\widetilde{\omega} = (3x^2 + y)dx + (2y - x)dy$$

Untersuchen Sie $\widetilde{\omega}$ hinsichtlich Geschlossenheit und Exaktheit. Begründen Sie Ihr Resultat!

Aufgabe 3. Seien ω und $\widetilde{\omega}$ die oben definierten Differentialformen. Gegeben sei die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\Phi(u, v) = (u - v, uv) = (x(u, y), y(u, v)).$$

Berechnen Sie den Rückzug $\Phi^*(\omega)$ sowie den Rückzug $\Phi^*(\widetilde{\omega})$. Untersuchen Sie sowohl $\Phi^*(\omega)$ als auch $\Phi^*(\widetilde{\omega})$ hinsichtlich Geschlossenheit und Exaktheit. Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4.

a) Warum gibt es einen Punkt auf der Parabel P mit der Gleichung

$$x^2 + y = 0,$$

welcher zum Punkt $(0, -4)$ minimalen Abstand hat?

b) Bestimmen Sie einen solchen Punkt mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren!

Aufgabe 5. Auf dem $\mathbb{R}^3$ betrachte man das Skalarprodukt

$$\sigma((a,b,c),(a',b',c')) = aa' + 2bb' + 3cc'.$$

Die von σ assoziierte Norm sei mit $\|\cdot\|_\sigma$ bezeichnet.

a) Gibe es eine maximale reelle Zahl r_1 und eine minimale reelle Zahl r_2, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$ die Ungleichungen

$$r_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_\sigma \leq r_2 \|x\|_2$$

gelten? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Falls möglich, berechnen Sie die beiden Werte r_1 und r_2.

Hinweis: Betrachten Sie die Extremwerte von $\|\cdot\|_\sigma$ auf S^2.