

Übungen zur Analysis II, Hausaufgabenblatt 4

F. Merkl, J. Berger, Y. Bregman, G. Svindland

Aufgabe 1: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie: Die Abbildungen

$$+ : V \times V \rightarrow V, (x, y) \mapsto x + y$$

und

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V, (\alpha, y) \mapsto \alpha \cdot y$$

sind stetig, wobei $V \times V$ und $\mathbb{R} \times V$ mit der von $(V, \|\cdot\|)$ bzw. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ induzierten Produktmetrik versehen sind.

Aufgabe 2: Lösen Sie das Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 + 2x_2 & x_1(0) &= -2 \\ x_2' &= -4x_1 - 3x_2 & x_2(0) &= 3 \\ x_3' &= -x_1 - 2x_2 + 2x_3 & x_3(0) &= 3 \end{aligned}$$

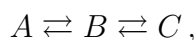
Aufgabe 3: Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $AB = BA$. Zeigen Sie:

- $\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$.
- Ohne die Voraussetzung $AB = BA$ ist die Gleichung in a) im allgemeinen falsch.

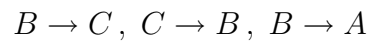
Aufgabe 4: Berechnen Sie $\exp(A)$ für den Fall, daß A eine sogenannte Jordanmatrix ist, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Aufgabe 5: In einem Reaktionsgefäß befinden sich 3 chemische Substanzen A, B und C . Die Substanzen können sich nach folgenden Reaktionen ineinander umwandeln:



wobei die Rate, mit der A in B umgewandelt wird, proportional zur Konzentration von A ist mit Proportionalitätskonstanten $K > 0$. Analoges gilt für die Reaktionen



mit derselben Proportionalitätskonstanten K .

- a) Beschreiben Sie die Dynamik der Konzentrationen $a(t), b(t), c(t)$ von A, B, C zum Zeitpunkt t durch ein Differentialgleichungssystem.
- b) Lösen Sie dieses System mit der Anfangsbedingung $a(0) = 1, b(0) = 0, c(0) = 0$ (d.h. anfangs ist nur A im Reaktionsgefäß vorhanden.)
- c) Berechnen Sie $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} b(t)$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t)$.

Abgabe: Spätestens am Dienstag 10.05.2005 um 11:00h.