Übungen zur Analysis II, Hausaufgabenblatt 3

F. Merkl, J. Berger, Y. Bregman, G. Svindland

Aufgabe 1: Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Funktion. Zeigen Sie, daß L stetig ist. Damit sind insbesondere die Projektionen

$$\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \quad \pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i\,,\ i = 1, \ldots, n$$

stetig.

Aufgabe 2: (zum Banachschen Fixpunktsatz) Drücken Sie für irgendeine Eingabe im Bogenmaß wiederholt auf die Kosinus-Taste Ihres Taschenrechners.

Aufgabe 3: Für $1 \leq p < +\infty$ sei $\mathcal{T}_p$ die von $\|\,.\,\|_p$ induzierte Topologie auf $\mathcal{C}[0,1]$. Zeigen Sie: Für $1 \leq p < q < +\infty$ gilt $\mathcal{T}_p \subsetneq \mathcal{T}_q$. (Hinweis: Verwenden Sie die Aufgabe 4 des zweiten Übungsblattes und betrachten Sie die Funktion $f \in \mathcal{C}[0,1]\,,\ f(x) = ax^b$ für geeignete a, b.)

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_p \to \|x\|_\infty \text{ für } p \to \infty\,.$$

b) $(*)$ Zeigen Sie die analoge Aussage für $f \in \mathcal{C}[a,b]$, d.h.

$$\|f\|_p \to \|f\|_\infty \text{ für } p \to \infty\,.$$

$(*)$ **Aufgabe 5:** Es sei $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \times (\mathbb{C} \cup \{\infty\})$ mit der Produkttopologie oder Produktmetrik versehen. Zeigen Sie, daß die Quotientenbildung

$$q : \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \backslash \{0\}) \to \mathbb{C}\,, q(x,y) = \frac{x}{y}$$

eine stetige Fortsetzung

$$Q : (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2 \backslash \{(0,0), (\infty,\infty)\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

besitzt, aber keine stetige Fortsetzung in die Punkte $(0,0)$ und (∞,∞).

Dieses Hausaufgabenblatt wird nicht korrigiert.