Lösungen des Hausaufgabenblattes 8

Y. Bregman

Aufgabe 1:

$f'(x) = D_1 g(g(x,x^2),x^3)\left(D_1 g(x,x^2) + 2x D_2 g(x,x^2)\right) + 3x^2 D_2 g(g(x,x^2),x^3).$

Wir setzen

$$x = 1,\ g(1,1) = 1,\ D_1 g(1,1) = -1 \text{ und } D_2 g(1,1) = 2$$

in $f'(x)$ ein und bekommen $f'(1) = 3$.

Aufgabe 2:

a) Die partielle Ableitungen von g sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= 2x + 4y + 2z + 1, \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= 10y + 4x - 2z - 2, \\ \frac{\partial g}{\partial z} &= 18z + 2x - 2y + 1. \end{aligned}$$

Der stationäre Punkt von g ist dann die Lösung des Systems

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 2z + 1 &= 0, \\ 4x + 10y - 2z - 2 &= 0, \\ 2x - 2y + 18z + 1 &= 0, \end{aligned}$$

also der Punkt $\begin{pmatrix} 37,5 \\ -16 \\ -6 \end{pmatrix}$.

b) Die Hess-Matrix von g im stationären Punkt ist

$$\operatorname{Hess} g(37,5,-16,-6) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 10 & -2 \\ 2 & -2 & 18 \end{pmatrix}$$

indefinit. Folglich ist $\begin{pmatrix} 37,5 \\ -16 \\ -6 \end{pmatrix}$ ein Sattelpunkt g.

Aufgabe 3: Für $g(x,y) = e^{x^2-xy}$ haben wir die folgende Taylorentwicklung:

$$\begin{aligned} g(x,y) &= g(0,0) + \frac{\partial g(0,0)}{\partial x}x + \frac{\partial g(0,0)}{\partial y}y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g(0,0)}{\partial x^2}x^2 + \frac{\partial^2 g(0,0)}{\partial x \partial y}xy + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g(0,0)}{\partial y^2}y^2 \\ &+ \frac{1}{6}\frac{\partial^3 g(0,0)}{\partial y^3}y^3 + +\frac{1}{2}\frac{\partial^3 g(0,0)}{\partial x \partial y^2}xy^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 g(0,0)}{\partial x^2 \partial y}x^2 y \\ &+ \frac{1}{6}\frac{\partial^3 g(0,0)}{\partial x^3}x^3 + o(||(x,y)||^3) = 1 + x^2 - xy + o(||(x,y)||^3). \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{1}{10}\sin(x+y) + u = x \\ \frac{1}{10}\sin(x-y) + v = y. \end{aligned}$$

Die Existenz einer Lösung $g(u,v) := (x(u,v), y(u,v)) \in \mathbb{R}^2$ für jedes $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ folgt aus dem Mittelwertsatz, aus der Dreieckungleichung und aus dem Banachschen Fixpunktsatz, da für jedes $(u,v),\ (x_1,y_1),\ (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\left\| \left(\frac{1}{10}\sin(x_1+y_1) + u, \frac{1}{10}\sin(x_1-y_1) + v \right) - \left(\frac{1}{10}\sin(x_2+y_2) + u, \frac{1}{10}\sin(x_2-y_2) + v \right) \right\|_1$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{10}\left(|\sin(x_1+y_1) - \sin(x_2-y_2)| + |\sin(x_1-y_1) - \sin(x_2-y_2)|\right) = \\ &= \frac{1}{10}\left(\cos(\xi_1)|(x_1+y_1) - (x_2-y_2)| + \cos(\xi_2)|(x_1-y_1) - (x_2-y_2)|\right) = \\ &\le \frac{2}{10}\left(|x_1-x_2| + |y_1-y_2|\right) = \frac{2}{10}\|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\|_1. \end{aligned}$$

Man kann bemerken, dass bei $(u,v) = (0,0)$ ist $(0,0) = (x(0,0), y(0,0)) = g(0,0)$ die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \frac{1}{10}\sin(x+y) = x \\ \frac{1}{10}\sin(x-y) = y. \end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung von $g(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ bei $(0,0)$ bis zur 2. Ordnung ist dann

$$g(u,v) = Dg(0,0)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + (u,v)D^2 g(0,0)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + o(\|(u,v)\|^2).$$

Die Ableitung von g ergibt sich aus der Gleichung

$$f(g(u,v)) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

die ihrerseits ergibt

$$Df(g(u,v))Dg(u,v) = E, \quad \forall \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

wobei

$$f(g(u,v)) = f(x(u,v), y(u,v)) = \begin{pmatrix} x - \frac{1}{10}\sin(x+y) \\ y - \frac{1}{10}\sin(x-y) \end{pmatrix}.$$

Bei $(0,0)$ ist dann

$$Dg(0,0) = Df(0,0)^{-1}.$$

Die Jacobi-Matrix von f ist

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{10}\cos(x+y) & -\frac{1}{10}\cos(x+y) \\ -\frac{1}{10}\cos(x-y) & 1 + \frac{1}{10}\cos(x-y) \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{11}{10} \end{pmatrix}.$$

Das folgt

$$Dg(0,0) = Df(0,0)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{55}{49} & \frac{5}{49} \\ \frac{5}{49} & \frac{45}{49} \end{pmatrix}.$$

Man kann direkt nachprüfen, dass $D^2 f(0,0) = 0$ und folglich ist $D^2 g(0,0) = 0$. Also ist die Taylorentwicklung von $g(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ bei $(0,0)$ bis zur 2. Ordnung dann

$$g(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{55}{49} & \frac{5}{49} \\ \frac{5}{49} & \frac{45}{49} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + o(\|(u,v)\|^2).$$

$(*)$ **Aufgabe 5:** Wir betrachten eine Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_b^k(U, \mathbb{R}^d)$, d.h. $\forall \epsilon > 0\ \exists N(\epsilon)$, so dass $\forall n, m \geq N(\epsilon)$ gilt

$$\max_{\alpha\in\mathbb{N}^m, |\alpha|\leq k} \sup_{t\in U} |D^\alpha x_n(t) - D^\alpha x_m(t)| < \epsilon.$$

Daraus folgt für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^d$ mit $|\alpha| \leq k$, dass $D^\alpha x_n$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion x_α konvergiert, zu zeigen bleibt, dass $x_\alpha = D^\alpha x$, wobei $x := x_0$ $(0 \in \mathbb{N}^d)$. Das beweisen wir mit Induktion.
Für $\alpha = 0$ ist die Behauptung klar. Also nehmen wir an, dass die Behauptung für $\alpha \in \mathbb{N}^d$ mit $|\alpha| \leq k-1$ gilt.
Nun fixieren wir ein $\alpha \in \mathbb{N}^d$ mit $|\alpha| = k$, dann ist $D^\alpha(\cdot) = D_i D^\beta(\cdot)$ für ein $|\beta| \leq k-1$ und ein $i \in 0, 1, \ldots, m-1$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $D^\alpha x_n$ integrierbar bezüglich x^i auf $[a,b]$ für jedes $[a,b] \subset P_i(U)$, wobei $P_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $x = (x^1, \ldots, x^d) \to x^i$, Projektion auf die i-te Koordinate. Außerdem konvergiert die Folge $(D^\alpha x_n)_{n=1}^\infty$ gleichmäßig gegen x_α. Folglich ist x_α integrierbar bezüglich x^i auf $[a,b]$ und $\int_a^b x_\alpha dx^i = \lim_{n\to\infty} \int_a^b D^\alpha x_n dx^i = \lim_{n\to\infty}(D^\beta x_n|_{x^i=b} - D^\beta x_n|_{x^i=a}) = x_\beta|_{x^i=b} - x_\beta|_{x^i=a}$, $\forall a, b \in P_i(U)$. Folglich ist $x_\alpha = D_i x_\beta = D_i D^\beta x$, d.h. $x_\alpha = D^\alpha x$.