Lösungsvorschläge zum Hausaufgabenblatt 7

Y.Bregman

Aufgabe 1:

a) Da die Grundfläche 1 ist und die Sauerstoffkonzentration nur von der Höhe über dem Boden abhängt, ergibt sich aus der Integration über das Volumen
$$n(t) = \int_0^{h(t)} c(x,t)dx.$$

b) Nach der Kettenregel gilt
$$\dot{n}(t) = \frac{d}{dt}p(q(t)) = c(h(t),t)\dot{h}(t) + \int_0^{h(t)} \frac{\partial c}{\partial t}(x,t)dx.$$

c)
$$\dot{n}(t) = e^{-t} - 2\int_0^t e^{x-2t}dx = -e^{-t} + 2e^{-2t}.$$

d)
$$\dot{n}(t) = \int_0^t e^{x-2t}dx = e^{-t} - e^{-2t} \;\Rightarrow\; \dot{n}(t) = -e^{-t} + 2e^{-2t}.$$

Aufgabe 2: Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt für jeden Einheitsvektor e
$$df(x)\cdot e = \sigma(\nabla f(x), e) \leq \|\nabla f(x)\|_2 \|e\|_2 = \|\nabla f(x)\|_2$$
und wenn e in Richtung des Gradientes zeigt, ist
$$\sigma(\nabla f(x), e) = \|\nabla f(x)\|_2 \sigma(e,e) = \|\nabla f(x)\|_2.$$
Also ist die Richtungsableitung von f bei x in Richtung eines Einheitsvektors genau dann am grösten, wenn e in Richtung des Gradientes zeigt.

Aufgabe 3: Die Geschwindigkeit des Asteroiden ist

$$\begin{aligned} v &= \|\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}\|_2 = \|\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} r(t)\cos\theta(t)\cos\phi(t) \\ r(t)\cos\theta(t)\sin\phi(t) \\ r(t)\sin\theta(t) \end{pmatrix}\|_2 \\ &= \Big(\Big(\dot{r}\cos\theta\cos\phi - r\sin\theta\dot{\theta}\cos\phi - r\cos\theta\sin\phi\dot{\phi}\Big)^2 \\ &+ \Big(\dot{r}\cos\theta\sin\phi - r\sin\theta\dot{\theta}\sin\phi + r\cos\theta\cos\phi\dot{\phi}\Big)^2 \\ &+ \Big(\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta}\cos\phi - r\cos\theta\sin\phi\dot{\phi}\Big)^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Nach der Vereinfachung bekommen wir

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\theta}.$$

($*$) **Aufgabe 4:** Lösung des Anfangswertproblems $y\prime = Ay,\ y(0) = c$, ist in der Form $y(t) = e^{At}c$. In der Aufgabe ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

und

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Unsere Matrix A ist in der Form $A = TDT^{-1}$ darstellbar, wobei

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Dementsprechend ist die Inverse von T

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} e^{At}c &= Te^{Dt}T^{-1}c = T\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}T^{-1}c \\ &= \begin{pmatrix} (1-2t)e^{2t} \\ (-1+2t)e^{2t} \\ (1+2t)e^{2t}. \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5: Für z haben wir

$$z(a+h) = b + f(a+h, b + f(a,b)h)\frac{h}{2} + f(a,b)\frac{h}{2}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Folglich ist $z(a) = b$ und nach der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dh}z(a+h) &= \left(D_1 f(a+h, b+f(a,b)h) + f(a,b)D_2 f(a+h, b+f(a,b)h)\right)\frac{h}{2} + \\ &+ \frac{1}{2}f(a+h, b+f(a,b)h) + \frac{1}{2}f(a,b)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dh^2}z(a+h) &= \frac{h}{2}\big(D_1^2 f(a+h, b+f(a,b)h) + 2f(a,b)D_1D_2 f(a+h, b+f(a,b)h) + \\ &+ f^2(a,b)D_2^2 f(a+h, b+f(a,b)h)\big) + \frac{1}{2}\left(D_1 f(a+h, b+f(a,b)h) + \right. \\ &+ \left. f(a,b)D_2 f(a+h, b+f(a,b)h)\right) + \frac{1}{2}\left(D_1 f(a+h, b+f(a,b)h) + \right. \\ &+ \left. f(a,b)D_2 f(a+h, b+f(a,b)h)\right).\end{aligned}$$

Also hat z an der Stelle a folgendes Taylorpolynom der 2. Ordnung

$$z(a+h) = b + f(a,b)h + \frac{1}{2}\left(D_1 f(a,b) + f(a,b)D_2 f(a,b)\right)h^2 + o(h^2).$$

Andererseits ist $y'(a+h) = f(a+h, y(a+h))$ und somit ist nach der Kettenregel

$$\begin{aligned}y''(a+h) &= \frac{d}{dh}f(a+h, y(a+h)) = D_1 f(a+h, y(a+h)) + D_2 f(a+h, y(a+h))y'(a+h) \\ &= D_1 f(a+h, y(a+h)) + D_2 f(a+h, y(a+h))f(a+h, y(a+h)).\end{aligned}$$

Mit $y(a) = b$ bekommen wir dann

$$y'(a) = f(a,b) \quad \text{und} \quad y''(a) = D_1 f(a,b) + f(a,b)D_2 f(a,b)$$

und daraus folgt, dass y und z an der Stelle a die gleiche Taylorpolynome bis zur 2. Ordnung haben.