# Hausaufgabenblatt 6, Musterlösungen

Y. Bregman

**Aufgabe 1:**

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{z^2}}}dx + \frac{xy}{z^2\sqrt{(1-\frac{y^2}{z^2})^3}}dy - \frac{xy^2}{z^3\sqrt{(1-\frac{y^2}{z^2})^3}}dz.$$

**Aufgabe 2:** Sei $H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 - y^2 - z^2 = 1\}$.

a) Wir linearisieren $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \to \sqrt{1+y^2+z^2} = x$:

$$dh(P_0) = \left(\frac{y_0}{\sqrt{1+y_0^2+z_0^2}}, \frac{z_0}{\sqrt{1+y_0^2+z_0^2}}\right) = \frac{1}{x_0}(y_0, z_0).$$

Gleichung der Tangentialebene als Graph:

$$\begin{aligned} x &= f(y_0,z_0) + dh(y_0,z_0)\begin{pmatrix} y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \\ &= x_0 + \frac{1}{x_0}(y_0,z_0)\begin{pmatrix} y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} = x_0 + \frac{y_0}{x_0}(y-y_0) + \frac{z_0}{x_0}(z-z_0). \end{aligned}$$

b) Wir linearisieren $g : (u,v) \to (\cosh u, \sinh u \cos v, \sinh u \sin v)$ in einem Punkt $(u_0, v_0)$ mit $g(u_0,v_0) = P_0$:

$$Dg(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} \sinh u_0 & 0 \\ \cosh u_0 \cos v_0 & -\sinh u_0 \sin v_0 \\ \cosh u_0 \sin v_0 & \sinh u_0 \cos v_0 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist die Parameterdarstellung der Tangentialebene:

$$\begin{aligned} P &= P_0 + Dg(u_0,v_0)\begin{pmatrix} u-u_0 \\ v-v_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + (u-u_0)\begin{pmatrix} \sinh u_0 \\ \cosh u_0 \cos v_0 \\ \cosh u_0 \sin v_0 \end{pmatrix} + (v-v_0)\begin{pmatrix} 0 \\ -\sinh u_0 \sin v_0 \\ \sinh u_0 \cos v_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 3:**

a) Seien $\phi:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\ \phi:\ x\to(x^3,x,x^2),\ \psi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ \psi:\ (a,b,c)\to(g(a,b),h(c))$. Dann ist $k(x)=f\circ\psi\circ\phi(x)$ und nach der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned}
k'(x) &= Df(\psi(\phi(x)))D\psi(\phi(x))D\phi(x)= \\
&= \left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial u},\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\right)\Big|_{\substack{u=g(x^3,x)\\ v=h(x^2)}} \begin{pmatrix} \frac{\partial g(a,b)}{\partial a} & \frac{\partial g(a,b)}{\partial b} & 0\\ 0 & 0 & h'(c)\end{pmatrix}\Big|_{\substack{a=x^3\\ b=x\\ c=x^2}} \\
&\cdot \begin{pmatrix} 3x^2\\ 1\\ 2x\end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial u},\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\right)\Big|_{\substack{u=g(x^3,x)\\ v=h(x^2)}} \begin{pmatrix} 3x^2D_1g(x^3,x)+D_2g(x^3,x)\\ 2xh'(x^2)\end{pmatrix} \\
&= D_1f(g(x^3,x),h(x^2))\big(3x^2D_1g(x^3,x)+D_2g(x^3,x)\big) \\
&+ 2xh'(x^2)D_2f(g(x^3,x),h(x^2)).
\end{aligned}$$

b)

$$k'(x)=D_1f(g(x^3,x),h(x^2))\big(D_1g(x^3,x)3x^2+D_2g(x^3,x)\big)+D_2f(g(x^3,x),h(x^2))h'(x^2)2x$$

**Aufgabe 4:** Wir definieren $\psi: j_1(\mathcal{M})\to j_2(\mathcal{M})\subset\hat{\mathcal{M}}_2,\ \psi(j_1(x))=j_2(x)$. $\psi$ ist eine Isometrie, denn $\hat{d}_2(\psi(j_1(x)),\psi(j_2(y)))=\hat{d}_2(j_2(x),j_2(y))=d(x,y)=\hat{d}_1(j_1(x),j_1(y))$, da $j_1$ und $j_2$ Isometrien sind. Nach Aufgabe 4, Blatt 4 gibt es eine stetige Fortsetzung $\phi:\ \hat{\mathcal{M}}_1\to\hat{\mathcal{M}}_2$ mit $\phi|_{j_1(\mathcal{M})}=\psi$. Da $j_1(\mathcal{M})$ dicht in $\hat{\mathcal{M}}_1$ ist, gilt

$$\forall a,b\in\hat{\mathcal{M}}_1\ \exists(x_n)_n,(y_n)_n\in\mathcal{M},\text{ so dass } j_1(x_n)\to a \text{ und } j_1(y_n)\to b \text{ für } n\to\infty.$$

Mit der Stetigkeit von $j_1$ und $\phi$ folgt

$$\hat{d}_1(a,b)=\lim_{n\to\infty}\hat{d}_1(j_1(x_n),j_1(y_n))=\lim_{n\to\infty}\hat{d}_2(j_2(x_n),j_2(y_n))=\hat{d}_2(\phi(a),\phi(b)).$$

Somit ist $\phi$ eine Isometrie und folglich eine injektive Abbildung. $\phi$ ist surjektiv, da

$$\forall m\in\hat{\mathcal{M}}_2\quad\exists(x_n)_n\in\mathcal{M},\text{ so dass } j_2(x_n)\to m \text{ für } n\to\infty,\quad \phi^{-1}(m)=\lim_{n\to\infty}j_1(x_n).$$

$*$**Aufgabe 5:** Die Ableitung der Funktion

$$F:\ (\mathcal{C}[0,1],\|\cdot\|_\infty)\to(\mathbb{R},|\cdot|),\quad F(f)=\int_0^1\arctan f(x)dx$$

bei $f\in\mathcal{C}[0,1]$ ist nach Definition eine lineare Abbildung

$$L_f:\ (\mathcal{C}[0,1],\|\cdot\|_\infty)\to(\mathbb{R},|\cdot|)$$

derart, dass gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{|F(f+h) - F(f) - L_f(h)|}{||h||_\infty} = 0.$$

Mit dem Einsetzen von $F$ und mit der Taylor-Entwicklung von $\arctan y$ auf der Stelle $f(x)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lim\nolimits_{h\to 0} \quad & \frac{|F(f+h) - F(f) - L_f(h)|}{||h||_\infty} = \\
= \quad & \lim_{h\to 0} \frac{|\int_0^1 (\arctan(f(x)+h(x)) - \arctan(f(x)))\,dx - L_f(h)|}{||h||_\infty} = \\
= \quad & \lim_{h\to 0} \frac{|\int_0^1 \left(\arctan(f(x)) + \frac{f(x)h(x)}{1+f^2(x)} + o(||h||_\infty) - \arctan(f(x))\right)dx - L_f(h)|}{||h||_\infty} = \\
= \quad & \lim_{h\to 0} \frac{|\int_0^1 \frac{f(x)h(x)}{1+f^2(x)}dx - L_f(h)|}{||h||_\infty}.
\end{aligned}$$

Folglich ist $L_f(h) = \int_0^1 \frac{f(x)h(x)}{1+f^2(x)}dx$.