Übungsblatt 9, Lösungsvorschläge

Bregman

Aufgabe 1:

a) Wir betrachten die Schnittmenge C des Hyperboloids $x^2+y^2-z^2=4$ mit der Ebene $2x+y-z=5$ in $\mathbb{R}^3$ in der Nähe des Punktes $P_0=(1,2,-1)$. Nahe bei P_0 wollen wir das Gleichungssystem nach x und y auflösen. Wir setzen $f=(f_1,f_2)$, wobei

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= x^2+y^2-z^2, \\ f_2(x,y,z) &= 2x+y-z, \end{aligned}$$

und erhalten die Jacobimatrix nach (x,y):

$$D_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

also

$$D_{(x,y)}f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist nicht singulär mit der Inversen

$$D_{(x,y)}f(x_0,y_0)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Der Satz von den impliziten Funktionen liefert die Existenz einer glatten Funktion $g=(g_1(z),g_2(z))$ definiert in einer kleinen Umgebung von $z_0=-1$, mit der Ableitung

$$Dg(z_0) = -D_{(x,y)}f(x_0,y_0,z_0)^{-1}\cdot D_zf(x_0,y_0,z_0) = -\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Wir können das System

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=4 \\ 2x+y-z=5 \end{cases}$$

bezüglich x und y auflösen. Also erhalten wir

$$\begin{cases} x(z)=g_1(z)=2+\frac{2}{5}z-\frac{1}{5}\sqrt{4z^2-10z-5} \\ y(z)=g_2(z)=1+\frac{1}{5}z+\frac{2}{5}\sqrt{4z^2-10z-5} \end{cases}$$

woraus durch Ableiten und Einsetzen von $z_0 = -1$ folgt:

$$\begin{pmatrix} g_1'(-1) \\ g_2'(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: Da $J(A) = A^{-1}$, gilt $J(A)A = E$, und daraus folgt $D(A^{-1})A + A^{-1}DA = 0$. Also ist

$$DJ(A) = D(A^{-1}) = -A^{-1}DAA^{-1}.$$

Aufgabe 3:

$$\begin{aligned} k'(t) &= D_1f(g(t^2, \cos t), h(2t, t+1)) \big(D_1g(t^2, \cos t)2t - D_2g(t^2, \cos t)\sin t\big) \\ &+ D_2f(g(t^2, \cos t), h(2t, t+1)) \left(D_1h(2t, t+1)2 + D_2h(2t, t+1)\right). \end{aligned}$$

(∗) **Aufgabe 4:** Zuerst leiten wir die Determinanteabbidung bei der Einheitsmatrix E ab

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial a_{kl}} \det(\delta_{ij} + a_{ij})_{i,j=1,,n} = \\ = \; &\frac{\partial}{\partial a_{kl}} \sum_{\pi \in S_n} (-1)^\pi \prod_{i=1}^n (\delta_{i\pi(i)} + a_{i\pi(i)})|_E = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^\pi \sum_{i=1}^n \delta_{ik}\delta_{\pi(i)l} \prod_{i=1}^n (\delta_{i\pi(i)} + a_{i\pi(i)})|_E = \\ = \; &\sum_{i=1}^n \delta_{ik}\delta_{il} = \delta_{kl}. \end{aligned}$$

Dann ist für jedes $A = (a_{kl})_{k,l=1,,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$D\det(E)(A) = \sum_{i=1}^n \delta_{ik} a_{kl} = \sum_{i=1}^n a_{kk} = \operatorname{Spur} A.$$

Sei $B \in GL(n, \mathbb{R})$. Wir definieren eine lineare Abbildung $f_{B^{-1}} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $f_{B^{-1}}(B) := \tilde{B}B^{-1}$. Dann ist $\tilde{B} = f(\tilde{B})B$ und somit ist $\det \tilde{B} = \det B \det(f(\tilde{B}))$ für jedes $\tilde{B} \in GL(n, \mathbb{R})$. Nach der Kettenregel gilt $D\det(\tilde{B}) = \det(B)D\det(f(\tilde{B}))Df(\tilde{B})$ für $\tilde{B} = B$ ist dann $D\det(B) = \det(B)D\det(E) \circ Df(B)$ und somit ist $D\det(B)(A) = \det(B)\operatorname{Spur}(AB^{-1})$.