Übungsblatt 8, Lösungsvorschläge

Y. Bregman

Aufgabe 1:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3D_1g(3x-1, g(4x-2, x^3)) + \\ &\quad D_2g(3x-1, g(4x-2, x^3))\left(4D_1g(4x-2, x^3) + 3x^2 D_2g(4x-2, x^3)\right). \end{aligned}$$

Nun setzen wir $g(2,1) = 1,\ D_1g(2,1) = 2,\ D_2g(2,1) = 3$ und $x = 1$ ein:

$$f'(1) = 3D_1g(2, g(2,1)) + D_2g(2, g(2,1))\,(4D_1g(2,1) + 3D_2g(2,1)) = 57.$$

Aufgabe 2: Wir betrachten die Funktion

$$f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = ((x+y)^2 - 1)^2 + (x-y)^2.$$

a) Die partielle Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 4(x+y)^3 - 2x - 6y, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 4(x+y)^3 - 2y - 6x. \end{aligned}$$

Daraus bekommen wir die stationäre Punkte von f: $A = (0,0),\ B = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),\ C = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

b)

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12(x+y)^2 - 2 & 12(x+y)^2 - 6 \\ 12(x+y)^2 - 6 & 12(x+y)^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

Folglich sind

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess} f(A) &= \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ \operatorname{Hess} f(B) &= \operatorname{Hess} f(C) = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\operatorname{Hess} f(B) = \operatorname{Hess} f(C)$ ist positiv definit, da $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$(x,y) \operatorname{Hess} f(B) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 10x^2 + 12xy + 10y^2 = (2x+3y)^2 + 6x^2 + y^2 > 0.$$

Also sind die Punkte B und C lokale Minima.
$\operatorname{Hess} f(A)$ ist indefinit, da

$$(x,y) \operatorname{Hess} f(A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2(x^2 + 6xy + y^2).$$

Aufgabe 3: Für $f(x,y) = e^{x\sin y}$ haben wir die folgende Taylorentwicklung:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}x + \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}x^2 + \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}xy + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2}y^2 \\ &+ \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial y^3}y^3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x \partial y^2}xy^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^2 \partial y}x^2 y \\ &+ \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^3}x^3 + o(||(x,y)||^3) = 1 + xy + o(||(x,y)||^3). \end{aligned}$$

Aufgabe 4:

a) Gegeben ist

$$f(x,y) = (\sqrt{(x-1)^2+y^2}, \sqrt{(y-1)^2+x^2}) = (\sqrt{1-2x+x^2+y^2}, \sqrt{1-2y+x^2+y^2})$$

Die Taylorentwicklung von f bei $(0,0)^t$ bis zur 2. Ordnung ist dann

$$f(x,y) = (1 - x + \frac{y^2}{2} + o(||(x,y)||^2), 1 - y + \frac{x^2}{2} + o(||(x,y)||^2)).$$

Da $f(0,0) = (1,1)^t$ und g eine Umkehrabbildung von f auf V, ist die Taylorentwicklung von g bei $(1,1)^t$ in der Form

$$g(1+s, 1+t) = s\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} + s^2\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{pmatrix} + st\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} + o(||(s,t)||^2).$$

Nun setzen wir f ein und vergleichen die Koeffizienten der Taylorentwicklung von g

$$\begin{aligned} (x,y)^t &= g(f(x,y)) = (-x + \frac{y^2}{2})\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} + (-y + \frac{x^2}{2})\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} + x^2\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix} + \\ &+ y^2\begin{pmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{pmatrix} + xy\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} + o(||(x,y)||^2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha_1 = \beta_2 = -1, \ \gamma_2 = \delta_1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

und alle andere Koeffizienten sind Null. Also ist die Taylorentwicklung von g bei $(1,1)^t$ gleich

$$g(1+s, 1+t) = (-s + \frac{t^2}{2} + o(||(s,t)||^2), -t + \frac{s^2}{2} + o(||(s,t)||^2)).$$

b) Zuerst berechnen wir $g = f^{-1}$. Wir betrachten dafür ein Hilfssystem

$$\begin{cases} 1 - 2x + x^2 + y^2 = 2u \\ 1 - 2y + x^2 + y^2 = 2v. \end{cases}$$

Die Lösung dieses Systems

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(1 - u + v - \sqrt{2(u+v) - 1 - (u-v)^2}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(1 + u - v - \sqrt{2(u+v) - 1 - (u-v)^2}\right). \end{cases}$$

Da $g(f(x,y)) = g(f_1, f_2) = (x,y)$ ist, setzen wir $w := f_1 = \sqrt{2u}$ und $z := f_2 = \sqrt{2v}$. Also erhalten wir

$$f(x,y)^{-1} = g(w,z) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - \frac{w^2}{2} + \frac{z^2}{2} - \sqrt{w^2 + z^2 - 1 - \frac{1}{4}(w^2 - z^2)^2} \\ 1 + \frac{w^2}{2} - \frac{z^2}{2} - \sqrt{w^2 + z^2 - 1 - \frac{1}{4}(w^2 - z^2)^2} \end{pmatrix}$$

Wir bezeichnen $s := w - 1$ und $t := z - 1$. Dann erhalten wir folgende Taylorentwicklung von g

$$g(s+1, t+1) = (-s + \frac{t^2}{2} + o(||(s,t)||^2), -t + \frac{s^2}{2} + o(||(s,t)||^2)).$$

(∗) **Aufgabe 5:** *Rotationsinvarianz des Laplaceoperators.*

Sei $y := Ux,\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Dann ist $y_i = \sum_{i=1}^n U_{ji} x_i$ und wir bekommen für $g(x) = f(U(x)$ nach der Kettenregel

$$\begin{aligned}
\triangle g(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial y_j}\right) = \sum_{i,j=1}^n U_{ji} \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial y_j} \\
&= \sum_{i,j=1}^n U_{ji} \sum_{k=1}^n U_{ki} \frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial y_j} = \sum_{i,j=1}^n U_{ji} \sum_{k=1}^n U_{ik}^t \frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial y_j} = \sum_{k,j=1}^n (UU^t)_{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial y_j} \\
&= \sum_{k,j=1}^n \delta_{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial y_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial y_k^2} = \triangle f(Ux).
\end{aligned}$$