Übungen zur Analysis II, Musterlösungen 7

F. Merkl, J.Berger,Y. Bregman, G.Svindland

Aufgabe 1: Wir betrachten die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ , \ f(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

und

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ g(x, y) = xy \ .$$

a) $Df(t) = (1, 1)^t$ und $dg(x, y) = ydx + xdy$.

b) $g \circ f(t) = t^2$ und $dg(f(t)) \cdot Df(t) = 2tdt$.

$*$ **Aufgabe 4:** Lösung eines Anfangswertproblems $y\prime = Ay, \ y(0) = c$, ist in der Form $y(t) = e^{At}c$. In der Aufgabe ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

und

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Unsere Matrix A ist glücklicherweise in der Form $A = TDT^{-1}$ darstellbar, wobei

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

also eine Jordanmatrix, und

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Dementsprechend ist die Inverse von T

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} e^{At}c &= Te^{Dt}T^{-1}c = T\begin{pmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2}e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} T^{-1}c \\ &= \begin{pmatrix} (-1+t)^2e^t \\ \frac{t^2}{2}e^t \\ (-1+t)e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5: *Die Formel von Heun.*
Für z haben wir

$$z(a+h) = b + f(a+\frac{h}{2}, b+f(a,b)\frac{h}{2})h, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Folglich ist $z(a) = b$ und nach der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dh}z(a+h) &= D_1f(a+\frac{h}{2}, b+f(a,b)\frac{h}{2})\frac{h}{2} + D_1f(a+\frac{h}{2}, b+f(a,b)\frac{h}{2})\frac{f(a,b)h}{2} \\ &+ f(a+\frac{h}{2}, b+f(a,b)\frac{h}{2}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dh^2}z(a+h) &= h\Bigg(D_1^2f(a+\frac{h}{2}, b+f(a,b)\frac{h}{2})\frac{1}{4} + 2D_1D_2f(a+\frac{h}{2}, b+f(a,b)\frac{h}{2})\frac{f(a,b)}{4} + \\ &+ D_2^2f(a+\frac{h}{2}, b+f(a,b)\frac{h}{2})\frac{f^2(a,b)}{4}\Bigg) + D_1f(a+\frac{h}{2}, b+f(a,b)\frac{h}{2}) \\ &+ f(a,b)D_2f(a+\frac{h}{2}, b+f(a,b)\frac{h}{2}). \end{aligned}$$

Also hat z an der Stelle a folgendes Taylorpolynom der 2. Ordnung

$$z(a+h) = b + f(a,b)h + \frac{1}{2}\left(D_1f(a,b) + f(a,b)D_2f(a,b)\right)h^2 + o(h^2).$$

Andererseits ist $y'(a+h) = f(a+h, y(a+h))$ und somit ist nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} y''(a+h) &= \frac{d}{dh}f(a+h, y(a+h)) = D_1f(a+h, y(a+h)) + D_2f(a+h, y(a+h))y'(a+h) \\ &= D_1f(a+h, y(a+h)) + D_2f(a+h, y(a+h))f(a+h, y(a+h)). \end{aligned}$$

Mit $y(a) = b$ bekommen wir dann

$$y'(a) = f(a,b) \quad \text{und} \quad y''(a) = D_1f(a,b) + f(a,b)D_2f(a,b)$$

und daraus folgt schon die Behauptung der Aufgabe.