Lösungsvorschlag zum Übungsblatt 5

G. Svindland

Aufgabe 1:

a) $\nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, $\quad$ Hess $f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\nabla f = \begin{pmatrix} 1/y \\ -x/y^2 \end{pmatrix}$, $\quad$ Hess $f = \begin{pmatrix} 0 & -1/y^2 \\ -1/y^2 & 2x/y^3 \end{pmatrix}$

c) $\nabla f = \begin{pmatrix} yx^{y-1} \\ x^y \log x \end{pmatrix}$, $\quad$ Hess $f = \begin{pmatrix} y(y-1)x^{y-2} & (1+y\log x)x^{y-1} \\ (1+y\log x)x^{y-1} & x^y \log^2 x \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: f ist stetig in $(0,0)$, da für $x \neq 0$, $y \neq 0$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{xy|y|}{(x^2+y^2)^{1/2}} - 0 \right| \leq |xy| \to 0\,, \quad \text{für } x, y \to 0,$$

und die Fälle $(x,0)$ und $(0,y)$ sieht man auch sofort.
Weiter ist

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0\,.$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist

$$f_x(x,y) = \frac{y|y|}{(x^2+y^2)^{1/2}} - \frac{x^2y|y|}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,.$$

Also $f_x(0,y) = y$ und daher $f_{xy}(0,0) = 1$. Wir berechnen nun

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0\,,$$

und für $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f_y(x,y) = \frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^{1/2}} - \frac{xy^2|y|}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,.$$

Also ist $f_y(x,0) = 0$ und daher auch $f_{yx}(0,0) = 0$. Damit haben wir gezeigt, daß $f_{xy}(0,0) = 1 \neq 0 = f_{yx}(0,0)$.

Aufgabe 3: Etwas rechnen, und vor allem richtig rechnen, dann geht's auf!

Aufgabe 4: Eine kurze Rechnung zeigt, daß $\nabla f(x_0) = 2x_0$ ist. Seien nun $x_0 = (a,b,c)$ und $v = (v_1, v_2, v_3)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d}{dt} f(x_0 + tv)\right]_{t=0} &= \left[\frac{d}{dt}((a+tv_1)^2 + (b+tv_2)^2 + (c+tv_3)^2)\right]_{t=0} \\
&= [2v_1(a+tv_1) + 2v_2(b+tv_2) + 2v_3(c+tv_3)]_{t=0} \\
&= 2v_1a + 2v_2b + 2v_3c \\
&= 2 < x_0, v > \quad ,
\end{aligned}$$

wobei wir mit $< .,. >$ das euklidische Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$ bezeichnen. Aus obiger Rechnung wird sofort klar, daß die Bedingung

$$\left[\frac{d}{dt} f(x_0 + tv)\right]_{t=0} = 0$$

gleichbedeutend ist mit $< \nabla f(x_0), v > = < 2x_0, v > = 0$. Da wir außerdem wissen, daß eine Ebene durch einen senkrechten Vektor (und einen Punkt) beschrieben wird, folgt nun die Behauptung aus der Aufgabe.

Aufgabe 5: Aus der Vorlesung und den Übungen wissen wir, daß zwei Normen $\| \,.\, \|_1$ und $\| \,.\, \|_2$ auf $\mathbb{R}^n$ genau dann die gleiche Topologie erzeugen, wenn es Konstanten $k, K > 0$ gibt, so daß für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$k\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq K\|x\|_1 \,.$$

Wir brauchen also nur zu zeigen, daß für zwei beliebige Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ eine solche Ungleichung gilt. Dazu genügt es, sich eine feste Norm zu wählen und zu zeigen, daß jede andere Norm durch diese wie oben abgeschätzt werden kann.
Wir wählen die euklidische Norm $\| \,.\, \|_2$ für eine Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ (man denke etwa an die kanonische Basis). D.h. für alle $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \right)^{1/2} .$$

Sei $\| \,.\, \|$ eine beliebige andere Norm auf $\mathbb{R}^n$, und sei $M := \max\{\|e_1\|, \ldots, \|e_n\|\}$. Dann ist

$$\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \cdot \|e_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2 \right)^{1/2} ,$$

wobei die erste Abschätzung eine Kosequenz der Dreiecksungleichung ist und die zweite aus der Hölderschen Ungleichung für das euklidische Skalarprodukt folgt. Damit erhalten wir

$$\|x\| \leq M\sqrt{n}\, \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \,.$$

Sei also $K := M\sqrt{n}$.
$\| \,.\, \|$ ist stetig bezüglich $\| \,.\, \|_2$. Denn für $(x_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\|x_j - x\|_2 \to 0 \,,\ j \to \infty$$

folgt:

$$| \, \|x_j\| - \|x\| \, | \leq \|x_j - x\| \leq K\|x_j - x\|_2 \to 0 \,,\ j \to \infty \,.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, daß $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x\|_2 = 1\}$ kompakt ist (bezüglich der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$). Die stetige Funktion $\| \,.\, \|$ nimmt daher auf S^{n-1} ihr Minimum k an. Da $\| \,.\, \|$ eine Norm ist, muß $k > 0$ sein (denn $0 \notin S^{n-1}$). Sei nun $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Dann ist $x/\|x\|_2 \in S^{n-1}$. Also gilt:

$$k \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \quad \Leftrightarrow \quad k\|x\|_2 \leq \|x\| \,.$$

Insgesamt folgt also für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$k\|x\|_2 \leq \|x\| \leq K\|x\|_2 \,.$$