Lösungsvorschlag zum Übungsblatt 4
(Gregor Fündland)

① a) Sei $A = (a_{ij})_{ij}$, $B = (b_{kl})_{kl}$

$$\Rightarrow \|AB\|_{HS} = \Big(\sum_{i,l=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl} \Big)^2 \Big)^{1/2}$$

$$\underset{\text{Ungleichung}}{\overset{\text{Cauchy-Schwarz-}}{\leq}} \Big(\sum_{i,l=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \Big) \Big(\sum_{j=1}^{n} b_{jl}^2 \Big) \Big)^{1/2}$$

$$= \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{j,l=1}^{n} b_{jl}^2 \Big)^{1/2}$$

$$= \|A\|_{HS} \, \|B\|_{HS} .$$

b) Für $m \geq n$ gilt:

$$\Big\| \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k!} A^k \Big\|_{HS} \leq \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k!} \|A^k\|_{HS}$$

$$\overset{a)}{\leq} \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k!} \|A\|_{HS}^k \xrightarrow[m,n \uparrow \infty]{} 0$$

(2.) i) $\|.\|$ ist eine Norm auf $C^1[0,1]$: klar

ii) $(C^1[0,1], \|.\|)$ ist vollständig.

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^1[0,1]$

$\Rightarrow$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ sind Cauchy-Folgen in $(C[0,1], \|.\|_\infty)$

Da $(C[0,1], \|.\|_\infty)$ ein Banachraum ist, folgt Existenz von $f, g \in C[0,1]$ mit $f_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} f$ und $f_n' \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} g$ in $(C[0,1], \|.\|_\infty)$. Dann konvergiert $f_n(x)$ gleichmäßig gegen $f(x)$ und $f_n'(x)$ gleichmäßig $g(x)$ (in $(\mathbb{R}, |.|)$). Daher folgt für alle $t\in[0,1]$:

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_0^t f_n'(x)\,dx & \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} & \displaystyle\int_0^t g(x)\,dx \\ \parallel & & \\ f_n(t)-f_n(0) & \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} & f(t)-f(0) \end{array}$$

Also $\int_0^t g(x)\,dx = f(t)-f(0)$. Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung liefert nun:

f ist differenzierbar und es ist $f' = g$.

$\Rightarrow$ $f\in C^1[0,1]$.

③ a) i) Seien $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}$ und $U_\varepsilon^d(x)$ vorgegeben.

Wir zeigen, daß es ein $\delta > 0$ gibt mit

$(x-\delta, x+\delta) \subset U_\varepsilon^d(x)$.

Das ist aber klar. Denn aus der Stetigkeit von

$\frac{2}{\pi}\arctan(x)$ folgt, daß es zu ε ein $\delta > 0$ gibt

mit $\frac{2}{\pi}|\arctan(x) - \arctan(y)| < \varepsilon$, falls

$y \in (x-\delta, x+\delta)$.

Dann ist aber $(x-\delta, x+\delta) \subseteq U_\varepsilon^d(x)$.

ii) Sei nun wieder $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Wir zeigen, daß es ein $\delta > 0$ gibt mit $U_\delta^d(x) \subseteq (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

Da $\tan(x)$ stetig ist, existiert ein $\lambda > 0$ mit

$$|\tan(\tilde{x}) - \tan(y)| < \varepsilon, \text{ falls } |\tilde{x} - y| < \lambda$$

für $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ und $\tilde{x} := \arctan(x)$.

$$\Rightarrow \quad |x - z| < \varepsilon, \text{ falls } |\arctan(x) - \arctan(z)| < \lambda, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Wähle nun $\delta := \lambda \cdot \frac{2}{\pi}$.

Dann gilt für alle $z \in U_\delta^d(x)$:

$$\frac{2}{\pi}|\arctan(x) - \arctan(z)| < \delta = \lambda \cdot \frac{2}{\pi},$$

also $|\arctan(x) - \arctan(z)| < \lambda$

$$\Rightarrow \quad |x - z| < \varepsilon$$

Somit ist $U_\delta^d(x) \subseteq (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

③ b) Wir betrachten die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$

Es gilt $d(n,m) \xrightarrow[n,m\uparrow\infty]{} 0$.

Also ist $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R},d)$

<u>Aber</u>: $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht in $(\mathbb{R},d)$.

Denn würde $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{R},d)$ gegen ~~einen~~ ein $y\in\mathbb{R}$ konvergieren, dann müßte $d(n,y) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0$ gelten.

Dies ist aber gleichbedeutend damit, daß $\frac{2}{\pi}\arctan(y) = 1$ sein müßte, da $\frac{2}{\pi}\arctan(n) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 1$.

Ein solches $y\in\mathbb{R}$ existiert jedoch nicht.

Folglich konvergiert die Cauchy-Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht in $(\mathbb{R},d)$. Also ist $(\mathbb{R},d)$ nicht vollständig.

(4.) i) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ eine Cauchy-Folge.

Dann konvergiert $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in (B, d_B).

<u>Denn:</u> f ist gleichmäßig stetig, d.h. $\forall\, \varepsilon>0$

$\exists\, \delta>0 : \forall\, x,y \in C$ mit $d_A(x,y)<\delta$:

$$d_B(f(x), f(y)) < \varepsilon \qquad (*).$$

Sei nun $\varepsilon>0$ beliebig. Wähle $\delta>0$ zu ε wie in $(*)$. Da ~~...~~ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge in (A, d_A) ist, folgt die Existenz eines $n(\delta)\in\mathbb{N}$ mit $d_A(x_n, x_m)<\delta$ für alle $n,m \geq n(\delta)$.

<u>Also:</u> $d_B(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ für alle $n,m\geq n(\delta)$

Folglich ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (B, d_B). Wegen der Vollständigkeit von (B, d_B) existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

ii) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ zwei Cauchy-Folgen in (A, d_A) mit $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ und $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ für ein $x\in A\setminus C$.

Sei $\varepsilon>0$ beliebig und δ wie in $(*)$. Dann existiert ein $n(\delta)\in\mathbb{N}$ mit $d_A(x, x_n) < \frac{\delta}{2}$ und $d_A(x, y_m) < \frac{\delta}{2}$ für alle $m,n\geq n(\delta)$. Daher ist $d_A(x_n, y_m) \leq d_A(x_n, x) + d_A(x, y_m)$

$$< \delta \quad \text{für alle } n,m\geq n(\delta)$$

$$\Rightarrow \quad d_B(f(x_n), f(y_m)) < \varepsilon \quad \forall\, n,m \geq n(\delta).$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\uparrow\infty} f(x_n) = \lim_{n\uparrow\infty} f(y_n) .$$

iii) Nun definieren wir eine Fortsetzung F von f auf A durch:

$$F(x) := \begin{cases} f(x), & x \in C \\ \lim_{n\uparrow\infty} f(x_n) & \text{für eine Folge } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C \\ & \text{mit } x_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} x \text{, falls } x \in A\setminus C. \end{cases}$$

Aus i) und ii) folgt, daß F wohldefiniert ist.

iv) Es bleibt zu zeigen, daß F gleichmäßig stetig ist.
Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach $(*)$ ~~existiert~~ existiert ein $\delta > 0$ so, daß $d_B(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$, falls $d_A(x,y) < \delta$ für $x, y \in C$. Seien nun $x, y \in A$ mit $d_A(x,y) < \frac{\delta}{3}$.
Außerdem seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in C mit $x_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} x$ und $y_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} y$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \frac{\delta}{3}$, $d(y_n, y) < \frac{\delta}{3}$, $d_B(F(x), f(x_n)) < \frac{\varepsilon}{3}$ und $d_B(f(y_n), F(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $n \geq N$. (nach i), ii) und iii))
Dann ist für $n \geq N$:

$$\begin{aligned} d_A(x_n, y_n) &\leq d_A(x_n, x) + d_A(x, y) \\ &\quad + d_A(y, y_n) \\ &< \delta . \end{aligned}$$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow}$

<u>Also:</u>

$$\begin{aligned} d_B(F(x), F(y)) &\leq d_B(F(x), f(x_n)) + d_B(f(x_n), f(y_n)) \\ &\quad + d_B(f(y_n), F(y)) \\ &< \varepsilon . \end{aligned}$$

(5.) $$x'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{=:A} x(t) \quad , \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (*).$$

Die Eigenwerte von A sind 1 und 3.

Eigenvektoren zum Eigenwert 1:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= x_1 \\ 3x_2 &= x_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \text{beliebig}, \; x_2 = 0$$

D.h. die Eigenvektoren zu 1 haben die Form $k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$.

Eigenvektoren zum Eigenwert 3:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3x_1 \\ 3x_2 &= 3x_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2x_1 .$$

Also haben die Eigenvektoren zum Eigenwert 3 die Form $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot k$, $k \in \mathbb{R}$.

Wir erhalten eine Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A.

Es ist $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

Also ist $x(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Lösung von $(*)$.