Lösungsvorschlag zum Übungsblatt 3

(1.) Sei $\tilde{d} := d_{|N \times N}$.

Z: $\mathcal{T}_{\tilde{d}} = \mathcal{S}$.

„$\subseteq$": Sei $U \in \mathcal{T}_{\tilde{d}} \Leftrightarrow \forall x \in U \; \exists \varepsilon_x > 0 : U^{\tilde{d}}_{\varepsilon_x}(x) \subset U$.

$$U^{\tilde{d}}_{\varepsilon_x}(x) = U^{d}_{\varepsilon_x}(x) \cap N$$

Sei $\tilde{U} := \bigcup_{x \in U} U^{d}_{\varepsilon_x}(x) \Rightarrow \tilde{U} \in \mathcal{T}$

Da $U = \tilde{U} \cap N$, folgt $U \in \mathcal{S}$.

„$\supseteq$": Sei $U \in \mathcal{S} \Rightarrow U = \tilde{U} \cap N$ für ein $\tilde{U} \in \mathcal{T}$.

$\Rightarrow \forall x \in U \; \exists \varepsilon_x > 0 : U^{d}_{\varepsilon_x}(x) \subset \tilde{U}$.

$$\begin{aligned} U \supseteq U^{d}_{\varepsilon_x}(x) \cap N &= \{ y \in M \mid d(x,y) < \varepsilon_x \} \cap N \\ &= \{ y \in N \mid \tilde{d}(x,y) < \varepsilon_x \} \\ &= U^{\tilde{d}}_{\varepsilon_x}(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow U \in \mathcal{T}_{\tilde{d}}$.

2. a) $\Rightarrow$ b): trivial

b) $\Rightarrow$ c): Die Aussage ist trivial für $x=0$. Sei also $x \in V \setminus \{0\}$. L ist stetig in 0, d.h.

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \|L(y)\|_W \leq \varepsilon \text{ für jedes } y \in V \text{ mit } \|y\|_V \leq \delta.$$

Sei $\varepsilon = 1$, und wähle $\delta > 0$ wie in $(*)$.

$$\Rightarrow \|L(x)\|_W = \left\| L\left(\frac{\|x\|_V}{\delta} \frac{x}{\|x\|_V} \cdot \delta \right) \right\|_W$$

$$= \frac{\|x\|_V}{\delta} \underbrace{\left\| L\left(\frac{x}{\|x\|_V} \cdot \delta \right) \right\|_W}_{\leq 1, \text{ da } \left\| \frac{x}{\|x\|_V} \cdot \delta \right\|_V = \delta.}$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{\delta}}_{=: k} \|x\|_V$$

c) $\Rightarrow$ a) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Setze $\delta := \frac{\varepsilon}{k}$.

Dann folgt für alle $x, y \in V$ mit $\|x-y\|_V \leq \delta$:

$$\|L(x) - L(y)\|_W = \|L(x-y)\|_W$$

$$\leq k \|x-y\|_V$$

$$\leq k \cdot \delta = \varepsilon.$$

(3.) Sei $\tilde{d}$ die Produktmetrik auf $M \times M$.

Betrachte für $(x_0, y_0) \in M \times M$ eine beliebige offene Umgebung U um $r := d(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$.

Dann existiert eine offene ε-Kugel $U_\varepsilon(r)$ (bzgl. Standardtopologie) um r mit $U_\varepsilon(r) \subset U$.

Sei $(x,y) \in U^{\tilde{d}}_{\varepsilon/2}(x_0,y_0) = U^{d}_{\varepsilon/2}(x_0) \times U^{d}_{\varepsilon/2}(y_0)$.

Dann folgt:
$$\begin{aligned} d(x,y) - d(x_0,y_0) &\leq d(x,x_0) + d(x_0,y_0) + d(y_0,y) - d(x_0,y_0) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

(2. Mal Dreiecksungleichung)

und
$$\begin{aligned} d(x_0,y_0) - d(x,y) &\leq d(x_0,x) + d(x,y) + d(y,y_0) - d(x,y) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

D.h. $|d(x,y) - d(x_0,y_0)| < \varepsilon$.

Also: $$d\left(U^{\tilde{d}}_{\varepsilon/2}(x_0,y_0)\right) \subset U_\varepsilon(r) \subset U.$$

(4.) Wir wollen den Banach'schen Fixpunktsatz anwenden:

Sei $g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, $x \in \mathbb{R}$.

Zeige: g ist eine Kontraktion: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|g(x) - g(y)| = \left| (x-y) - \left(\frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f(y)}{f'(y)} \right) \right|$$

$$\overset{\text{Mittelwert-Satz}}{=} \left| (x-y) - \frac{f'(\xi)^2 - f(\xi) \cdot f''(\xi)}{f'(\xi)^2} (x-y) \right|, \quad \xi \in [x,y]$$

$$= \left| \frac{f(\xi) f''(\xi)}{f'(\xi)^2} \right| |x-y|$$

$$\leq K |x-y| \quad \text{mit } K := \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2} \right| < 1.$$

Da g eine Kontraktion ist, folgt mit dem Banachschen Fixpunktsatz, daß es genau einen Fixpunkt x^* von g gibt und daß für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ die Folge x_0, $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, ... (also das Newtonverfahren) gegen x^* konvergiert.

Es ist aber: $g(x) = x \Leftrightarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{f'(x)} = 0$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0.$$

Da es genau einen Fixpunkt x^* gibt, kann die Gleichung $f(x) = 0$ nur eine Lösung haben und zwar x^*.

(5.) Wir zeigen:
$$\mathcal{L}: C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$$
$$\mathcal{L}(h)(x) = g(x) - \int_0^1 f(x,y)h(y)\,dy$$
ist eine Kontraktion:

Seien $h^1, h^2 \in C[0,1]$:
$$\|\mathcal{L}(h^1) - \mathcal{L}(h^2)\|_\infty = \left\| \int_0^1 f(x,y)\left(h^1(y) - h^2(y)\right) dy \right\|_\infty$$
$$\leq \left\| \int_0^1 |f(x,y)|\,|h^1(y) - h^2(y)|\,dy \right\|_\infty$$
$$\leq \left\| \int_0^1 |f(x,y)|\,dy \right\|_\infty \|h^1 - h^2\|_\infty$$
$$\leq K \|h^1 - h^2\|_\infty .$$
Mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes folgern wir, daß $\mathcal{L}$ genau einen Fixpunkt $h^* \in C[0,1]$ besitzt.

Es ist
$$h^*(x) = \mathcal{L}(h^*)(x) \Leftrightarrow g(x) - \int_0^1 f(x,y)\,h^*(y)\,dy = h^*(x)$$
$$\Leftrightarrow h^*(x) + \int_0^1 f(x,y)h^*(y)\,dy = g(x).$$
Daher hat die Integralgleichung genau eine Lösung.

Es ist
$$\|g\|_\infty = \left\| h^*(x) + \int_0^1 f(x,y)h^*(y)\,dy \right\|_\infty$$
$$\geq \|h^*\|_\infty - \left\| \int_0^1 f(x,y)h^*(y)\,dy \right\|_\infty$$
$$\geq \|h^*\|_\infty - K\|h^*\|_\infty$$
$$\Rightarrow \|h^*\|_\infty \leq \frac{\|g\|_\infty}{1-K}$$