Lösungen des Übungsblattes 2.

<u>Aufgabe 1</u>: a) Dreiecksungleichung: Seien $x, y, z \in A \times B$,

$x = (x_A, x_B)$ mit $x_A \in A$, $x_B \in B$ (analog für z, y):

$$d(x,y) = \max\{d_A(x_A, y_A), d_B(x_B, y_B)\}$$

$$\underset{\substack{\text{für } d_A \text{ und} \\ d_B}}{\overset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq}} \max\{d_A(x_A, z_A) + d_A(z_A, y_A), d_B(x_B, z_B) + d_B(z_B, y_B)\}$$

$$\leq \max\{d_A(x_A, z_A), d_B(x_B, z_B)\} + \max\{d_A(z_A, y_A), d_B(z_B, y_B)\}$$

$$= d(x,z) + d(z,y).$$

b) Rest: trivial

<u>Aufgabe 2</u>: Bezeichne mit $[a]^{[0]}$ die Elemente von $V/_{[0]}$ $(a \in V)$ und mit $[a]^{\sim}$ die Elemente von $V/_{\sim}$. Z: $\forall a \in V : [a]^{[0]} = [a]^{\sim}$.

Es ist $[a]^{[0]} = \{y \in V \mid y = a + x_y,\ x_y \in [0]\}$.

$\forall\ y \in [a]^{[0]}$ gilt also $\|y - a\| = \|a + x_y - a\| = \|x_y\| = 0$

$\Rightarrow y \in [a]^{\sim}$.

Umgekehrt gilt für alle $y \in [a]^{\sim}$:

$(a - y) \in [0]$ bzw. $(y - a) \in [0]$ (, denn $[a]^{\sim} = \{y \in V \mid \|a - y\| = 0\}$.)

Dann ist $y = a + z$ mit $z \in [0]$ (Wähle z.B $z = y - a$.)

Also folgt: $y \in [a]^{[0]}$.

Insgesamt ergibt sich für alle $a \in V$: $[a]^{[0]} = [a]^{\sim}$, d.h. $V/_{[0]} = V/_{\sim}$.

Aufgabe 4: $\tau_B \subseteq \tau_A$

$$\Rightarrow \quad U_1^B(0) = \{x \in V \mid \|x\|_B < 1\} \in \tau_A .$$

$$\Rightarrow \quad \exists\, \delta > 0: \quad U_\delta^A(0) = \{x \in V \mid \|x\|_A < \delta\} \subset U_1^B(0).$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \in V \setminus \{0\}: \left\| \frac{\delta}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|_A} \right\|_B \leq 1, \text{ denn}$$

$$\left\| \frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|_A} \right\|_A = \frac{\delta}{2} < \delta \quad \text{, also}$$

$$y := \frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|_A} \in U_\delta^A(0) \subset U_1^B(0) .$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \in V : \quad \|x\|_B \leq \frac{2}{\delta} \|x\|_A$$

Setze: $C := \frac{2}{\delta}$.

Aufgabe 5: a) $\emptyset \in \tau$, $M \in \tau$ (trivial)

b) Seien $C, D \in \tau$. Dann $C = \bigcup\limits_{(U^C, V^C) \in \mathcal{P}_C} U^C \times V^C$

und $D = \bigcup\limits_{(U^D, V^D) \in \mathcal{P}_D} U^D \times V^D$ mit $\mathcal{P}_C, \mathcal{P}_D \subseteq \tau_A \times \tau_B$.

$$C \cap D = \bigcup_{(U^D, V^D) \in \mathcal{P}_D} \underbrace{\left[\bigcup_{(U^C, V^C) \in \mathcal{P}_C} \underbrace{(U^C \cap U^D)}_{\in \tau_A} \times \underbrace{(V^C \cap V^D)}_{\in \tau_B} \right]}_{\in \tau}$$

$\in \tau$ wegen c). (siehe nächste Seite)

c) Sei $(C_i)_{i\in I}$ eine Familie von Elementen von $\mathcal{T}$.

$$C_i = \bigcup_{(U^{c_i},V^{c_i})\in \mathcal{P}_{C_i}} U^{c_i}\times V^{c_i} \quad \text{mit } \mathcal{P}_{C_i} \subseteq \mathcal{T}_A \times \mathcal{T}_B .$$

Sei $\mathcal{P} := \bigcup_{i\in I} \mathcal{P}_{C_i}$. Dann ist $\bigcup_{i\in I} C_i = \bigcup_{(U,V)\in\mathcal{P}} U\times V \in \mathcal{T}$.

<u>Aufgabe 3</u>: Einfach den Beweis aus der Vorlesung abschreiben und dabei die p- bzw. q-Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ durch die p- bzw. q-Norm auf $C[a,b]$ ersetzen.