Lösungsvorschlag zum Übungsblatt 10
(Gregor Sündland)

Aufgabe 1: $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2^2 = 1\}$.

Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|_2^2$. Dann ist $Df(x) = 2x^t$,

$$\operatorname{rg} Df(x) = 1 \quad \forall x \in S^{n-1}$$

und $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 1\}$.

Folglich ist S^{n-1} eine Submannigfaltigkeit (Darstellung als Niveaugebilde)

Außerdem ist für alle $x \in S^{n-1}$:

$$T_x S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v\rangle = 0\}$$

nach Definition des Tangentialraums.
(Hierbei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$.)

Aufgabe 2: Es ist $M = \{ (x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R} \}$

mit $f(x) = x^{2/3}$.

Für $x \neq 0$ gilt $f'(x) = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ und daher

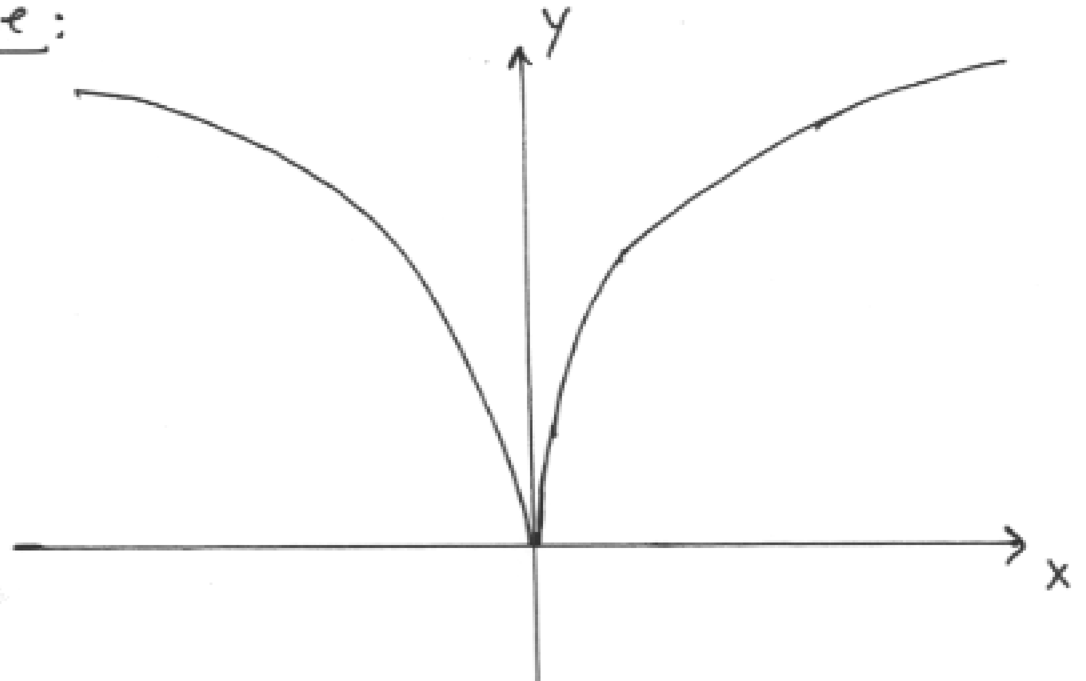
$$\underset{\substack{x \to 0 \\ (x<0)}}{\text{l-lim}} f'(x) = -\infty \quad , \quad \underset{\substack{x \to 0 \\ (x>0)}}{\text{r-lim}} f'(x) = +\infty .$$

Also ist f bei (0,0) nicht differenzierbar.

Deshalb ist M keine Submannigfaltigkeit.

$M \setminus \{(0,0)\}$ ist ~~[illegible]~~ jedoch eine! (Darstellung als Graph)

Skizze:



Aufgabe 3: Sei $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$$f(s,t) = (\cos 2t, \sin 2t, s\cos t, s\sin t).$$

Dann ist $Df(s,t) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sin 2t \\ 0 & 2\cos 2t \\ \cos t & -s\sin t \\ \sin t & s\cos t \end{pmatrix}$

und $\operatorname{rg} Df(s,t) = 2$.

Betrachte die offenen Mengen

$$U_{a,b,c,d} := (a,b) \times (c,d) \text{ mit } d-c = b-a = \frac{\pi}{16}$$

$a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

Seien $g_{a,b,c,d} := f|_{U_{a,b,c,d}}$. Dann ist

$$M = \bigcup_{\substack{a,b,c,d \\ b-a=d-c=\frac{\pi}{16}}} g_{a,b,c,d}(U_{a,b,c,d}) \quad \text{und } \operatorname{rg} Dg_{a,b,c,d}(s,t) = 2$$

für alle $(s,t) \in U_{a,b,c,d}$

Da $[a,b] \times [c,d]$ kompakt ist, ist die stetige Fortsetzung von $g_{a,b,c,d}$ auf $[a,b] \times [c,d]$ stetig umkehrbar.

Denn $g_{a,b,c,d}$ ist ~~nur~~ injektiv und siehe Hausaufgabenblatt 5, Aufgabe 4. Dann ist aber auch $g_{a,b,c,d}$ stetig umkehrbar.

Daher ist M eine Submannigfaltigkeit (parametrisierte Darstellung

Aufgabe 4: Sei a die Länge des Stäbchens zwischen A und B

b — " — B und C

c — " — C und D

d — " — A und D.

Außerdem sei M der Raum aller erlaubten Konfigurationen.

a) Es ist $M \subseteq \mathbb{R}^8$, $M = \left\{ x \in \mathbb{R}^8 \mid h(x) = \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \\ d^2 \end{pmatrix} \right\}$

mit

$$h(x) = \begin{pmatrix} \left\| \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 - x_4 \end{pmatrix} \right\|_2^2 \\ \left\| \begin{pmatrix} x_3 - x_5 \\ x_4 - x_6 \end{pmatrix} \right\|_2^2 \\ \left\| \begin{pmatrix} x_5 - x_7 \\ x_6 - x_8 \end{pmatrix} \right\|_2^2 \\ \left\| \begin{pmatrix} x_7 - x_1 \\ x_8 - x_2 \end{pmatrix} \right\|_2^2 \end{pmatrix}.$$

Also ist M 4-dimensional

b) Wie in a) folgt: M ist 8-dimensional.

Es ist

$$Dh(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1-x_3) & 2(x_2-x_4) & 2(x_3-x_1) & 2(x_4-x_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(x_3-x_5) & 2(x_4-x_6) & 2(x_5-x_3) & 2(x_6-x_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(x_5-x_7) & 2(x_6-x_8) & 2(x_7-x_5) & 2(x_8-x_6) \\ 2(x_1-x_7) & 2(x_2-x_8) & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(x_7-x_1) & 2(x_8-x_2) \end{pmatrix}$$

und daher:

$$Dh(A_0, B_0, C_0, D_0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Dh(A_0, B_0, C_0, D_0)v = 0 \iff \begin{aligned} v_1 &= v_3 \\ v_2 &= v_8 \\ v_4 &= v_6 \\ v_5 &= v_7 \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ eine Basis

des Tangentialraums an (A_0, B_0, C_0, D_0)

geometrische Interpretation:

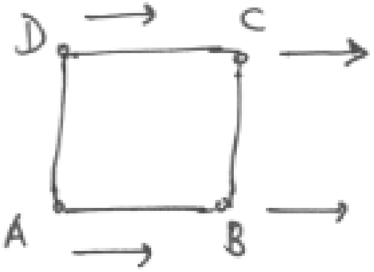
Wir betrachten folgende Basis des Tangentialraumes an (A_0, B_0, C_0, D_0):

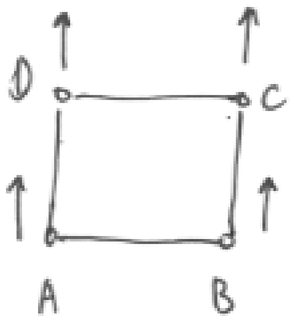
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

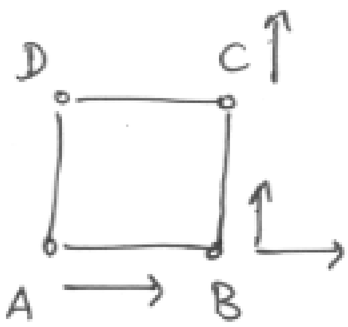
Verschiebung in „x-Achsen-Richtung"

Verschiebung in „y-Achsen-Richtung"

Drehung um D







$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Stauchung